АЛТАЙСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. И.И.ПОЛЗУНОВА

КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

БАРНАУЛ
1972

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Алтайский политехнический институт
им. И.И.Ползунова

Л.П.Леонов, В.Г.Дронов, Н.П.Ошенкова

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Барнаул
1972

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная наука и техника предъявляют очень высокие требования к математической подготовке инженера. Если еще сравнительно недавно инженерная практика могла обходиться не очень сложными математическими расчетами, то возникающие в настоящее время перед инженерами задачи требуют знания и применения достаточно сильных и новых математических методов.

Разумеется, что это не могло не отразиться на содержании втузовского курса высшей математики. За последние годы его программа неоднократно расширялась. Это породило в свою очередь некоторое противоречие между объемом необходимых специалисту научных знаний и возможностью их прочного усвоения в отведенное для изучения курса высшей математики во втузе время.

Совершенно ясно, что , во-первых, программу курса нельзя увеличивать неограниченно, а во-вторых, появились разделы математики, нужные для инженеров одних специальностей и не столь необходимые для инженеров других.

Перед авторами стояла задача : найти те резервы времени, которые позволили бы студентам механико-технологического факультета изучить требуемые им новые современные разделы математики, такие как уравнения математической физики, математическая обработка результатов экспериментов и др., не предусмотренные существующей программой. Этого авторам удалось достичь за счет модернизации курса высшей математики, читаемого в течение ряда лет для студентов этого факультета. Под модернизацией курса мы понимаем не столько введение новых разделов, сколько изложение классических понятий и методов на базе современной математики, основу которой составляют математическая логика и теория множеств.

Авторами были изучены требования, предъявляемые к современным инженерам механико-технологического факультета и учебные планы его специальностей, было выяснено, где материал того или иного раздела курса высшей математики как часто и в каком объеме встречается :

а) в самом курсе высшей математики ,
б) в общеобразовательных дисциплинах ,
в) в специальных дисциплинах.

Исходя из этого была построена логическая структура курса, представляющая собой логическую сеть связей, понятий и разделов

курса.

Затем был произведен анализ составленной логической структуры, на основе многолетнего опыта. При этом мы руководствовались такими принципами :

1. Должно быть сокращено до разумного минимума количество изучаемых математических фактов. Главное внимание должно быть уделено овладеванию методами математического анализа явлений и процессов.

2. В процессе перестройки должно освободиться время для изучения дополнительных глав, требуемых специальностью.

3. В основу курса должны быть положены элементы математической логики и теории множеств. Только на этой основе может решиться проблема модернизации втузовского курса.

4. Все понятия и методы математического анализа должны изучаться параллельно для различных типов функциональных зависимостей.

5. В процессе изучения курса студент должен широко пользоваться справочной литературой по математике, таблицами различных функций, неопределенных интегралов, несобственных интегралов, таблицами сумм, рядов, справочниками по дифференциальным уравнениям и т.д.

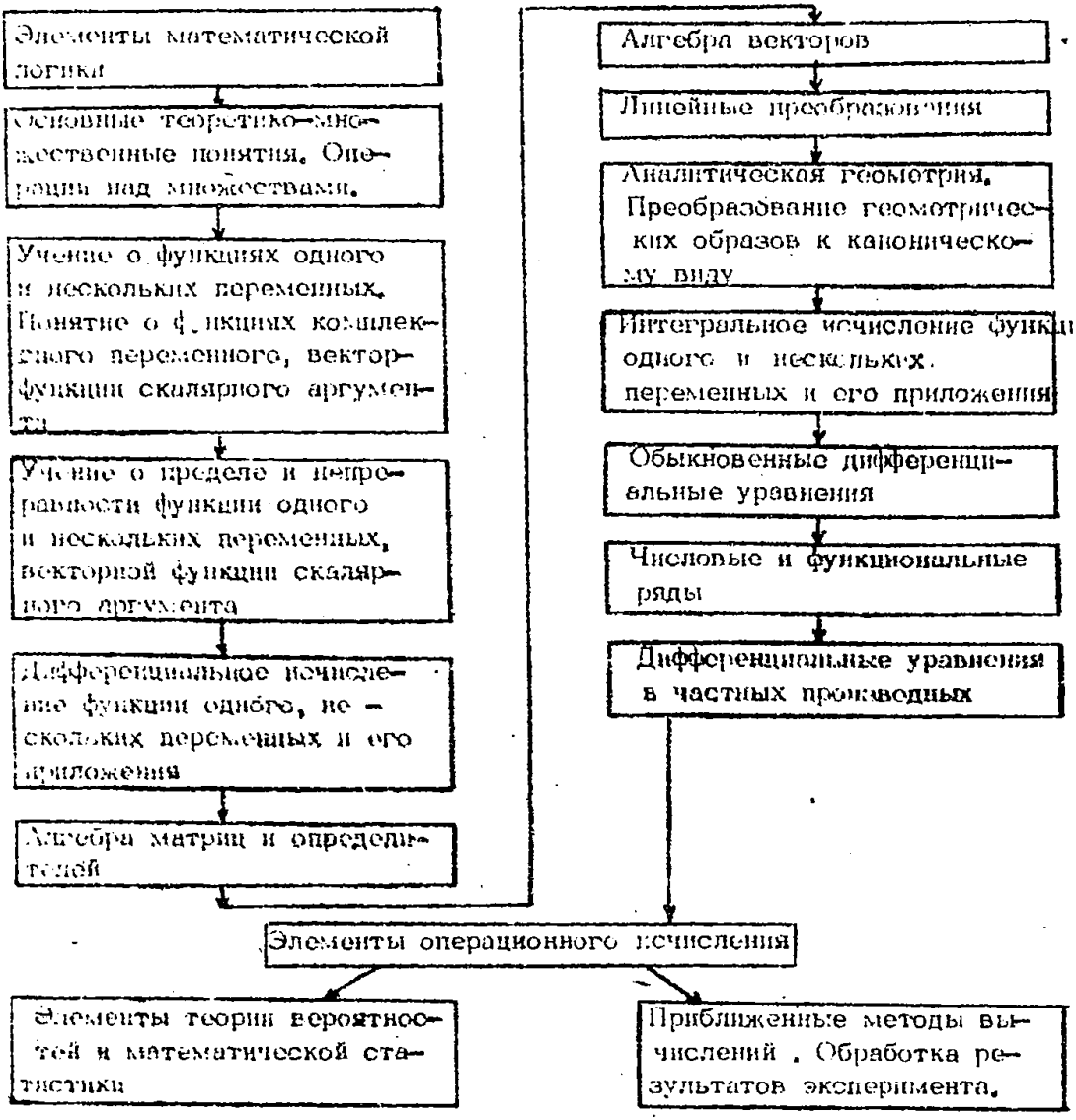
6. В ходе решения задач с конкретным содержанием из физики, химии, теоретической механики, сопротивления материалов и других различных дисциплин нужно учить студентов построению математических моделей.

Это требуется для того, чтобы будущий инженер, столкнувшись с конкретной технической задачей, смог сформулировать ее на языке математики, построив соответствующую математическую модель.

На основании анализа логической структуры с учетом времени, предусматриваемого существующим учебным планом была разработана программа курса высшей математики для студентов МТФ и в соответствии с этой программой написано настоящее пособие.

БЛОК – СХЕМА

КУРСА ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ МЕХАНИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА



Построение курса по разработанной программе и характер изложения во многом, на наш взгляд, не являются традиционными.

Так, например, изучение курса высшей математики начинается не с аналитической геометрии, как того требует традиционная программа, а с изучения элементов математической логики и теории множеств, что позволяет с самого начала изложения курса использовать более общие методы при изучении отдельных разделов, благодаря чему появилась возможность объединить и укрупнить некоторые разделы курса.

Такие понятия как "функция", "предел", "производная", "интеграл" в нашем пособии изучаются не в разное время и не в разных разделах. Так, в учении о функциях мы рассматриваем сразу функциональные зависимости различной природы : действительные функции одного действительного переменного, действительные функции двух и трех действительных переменных, действительные функции комплексного переменного, комплексные функции комплексного переменного, скалярную функцию векторного аргумента, векторную функцию скалярного аргумента.

В разделе "дифференциальное исчисление" изучаются операции дифференцирования действительных функций одного и нескольких переменных, векторной функции скалярного аргумента и производная по направлению.

Раздел "Интегральное исчисление" начинается с изучения процесса интегрирования функции любой природы по любой области, рассматриваются способы вычисления интегралов и их приложения. Тема же "Неопределенный интеграл" в этом разделе не рассматривается с традиционной полнотой. Рассматривается вывод формулы Лейбница-Ньютона, таблица простейших интегралов дается с указанием пределов, затем рассматриваются основные методы нахождения определенных интегралов и основное внимание уделяется обучению студентов приведению интегралов к табличному виду и работе со справочниками.

Отказ от традиционного изложения раздела " Аналитическая геометрия" в начале курса (этот раздел в нашем пособии стоит между разделами "Дифференциальное исчисление", " Интегральное исчисление" (см. блок-схему курса), позволил при изучении геометрических образов широко применять такой сильный математический аппарат, как дифференциальное исчисление.

Раздел "Интегральное исчисление" непосредственно следует за разделом "Аналитическая геометрия", который широко применяется в его приложениях.

По нашему мнению, эти отклонения от традиций позволяют, во-первых, с большей логической стройностью и без дублирования провести изложение предмета, а, во-вторых, и это главное, появилась реальная возможность дать студентам новые разделы (уравнения математической физики, обработка экспериментальных данных), что позволяет ставить и решать многие математические задачи инженерного характера, научить студентов видеть как качественные, так и количественные стороны полученных результатов.

Конечно, мы имеем ввиду, что не все из указанных методических новшеств могут оказаться целесообразными.

В дальнейшем мы продолжим работу над поисками новых методических приемов изложения курса высшей математики.

Г Л А В А 1.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

В В Е Д Е Н И Е.

Математическая логика и теория множеств составляют основу современной математики.

Логикой называются наука о законах и формах мышления. Основоположником ее является древнегреческий ученый Аристотель (IУ век до н.э.).

Математическая логика есть часть логики, в которой законы мышления выражаются формулами аналогично тому, как в алгебре выражаются действия над числами. Мысль о построении такой математической логики впервые была высказана немецким математиком и философом В. Г. Лейбницом в XУII веке. У него еще в юношеские годы возникает идея о необходимости и возможности создания новой науки, в которой каждое основное понятие имело бы свой символ. Для этих символов нужно установить правила их соединения, и тогда всякое рассуждение получит вид некоторого исчисления. Логика, по мысли Лейбница, должна стать "искусством исчисления". Тогда споры ученых и философов должны будут разрешаться спокойным вычислением. Частичное осуществление идей Лейбница началось в середине X1X века в трудах ирландского математика Д.Буля (1815г. - 1864 г.).

Введение символических обозначений в логику имело для этой науки такое же решающее значение, как, например, введение буквенных обозначений для величин в математике. Именно благодаря такому введению буквенных обозначений и символов для математических действий математика получила возможность дальнейшего бурного развития.

Известно, что только такие гении древности как Архимед, Эвклид, Диофат смогли дать замечательные образцы математического творчества, не пользуясь языком формул, а излагая свои мысли в словесной форме.

Благодаря введению символов , логика получила возможность дальнейшего развития и стало возможным создание в X1X века математической логики. Её развивают немецкий математик Д .Гильберт (1862 - 1943 г.), английский философ и логик Б. Рассел, польские

математики Я.Лукасевич и А.Тарский. В нашей стране наибольший вклад в развитие математической логики внесли А.И.Жегалкин, П.С.Новиков, А.А.Марков.

За выдающиеся научные исследования в области математической логики академику Академии наук СССР П.С.Новикову присуждена в 1957 году Ленинская премия.

Современная математическая логика связана с обоснованием математики, с ее модернизацией, с автоматикой, машинной математикой, кибернетикой и т.д.

Математическая логика и теория множеств, составляя основу современной математики, в то же время являются неотъемлемой частью самого процесса преподавания математики, его важным рабочим инструментом.

§ 1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Предметом изучения элементарной математической логики являются высказывания и высказывательные формы.

Алгебра высказываний – наиболее элементарная часть математической логики. Рассмотрим некоторые основные понятия этой алгебры.

Допустимые высказывания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимым высказыванием называется повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно либо истинно, либо ложно.

"Истинность" или "ложность", приписываемые тому или иному высказыванию, называются его значениями истинности.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Допустимые высказывания будем обозначать буквами латинского алфавита A,B,C..... Истинное высказывание будем обозначать либо "И", либо "1", ложное высказывание – либо "Л", либо "О".

Примеры высказываний. 1. "2 + 2 = 5".
2. "Число 3 – простое".
3. "Река Обь впадает в Черное море".
4. "Луна – спутник Земли".

Первое и третье высказывания – ложны, второе и четвертое – истинны.

Логические операции над высказываниями.

Логической операцией над допустимым высказыванием или над допустимыми высказываниями называется получение нового высказывания, которое было бы также допустимым.

Такие операции можно получить путем видоизменения данных высказываний с помощью частицы "НЕ" и союзов "И", "ИЛИ", "ЕСЛИ....., ТО .....", "..... ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА .....".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть А – допустимое высказывание. Высказывание, видоизмененное частицей "НЕ", называется отрицанием первоначального высказывания.

Введенная операция символически обозначается следующим образом: $\bar{A}$ и читается: "НЕ-А" или "НЕВЕРНО, ЧТО А".

П Р И М Е Р. Высказывание А – "5 – простое число". Тогда $\bar{A}$ – "5 не есть простое число".

Из данного определения следует, что если А-истинное высказывание, то $\bar{A}$- ложное и наоборот. Этот факт можно представить в виде хорошо обозримой так называемой таблицы истинности для операции отрицания.

A	$\bar{A}$
и	л
л	и

или

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

У п р а ж н е н и е. Построить отрицание высказывания А –"8 есть простое число", $\bar{A}$–" 8 не есть простое число".

Пусть А и В – допустимые высказывания. Построим сложное высказывание с помощью союза "И".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конъюнкцией высказываний А и В или их логическим произведением называется высказывание, которое считается истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания (А и В) истинны.

Конъюнкция высказываний A и B обозначается символически так : AB или $A \wedge B$.
В силу определения таблица истинности имеет вид :

A	B	$A \wedge B$
л	л	л
и	л	л
л	и	л
и	и	и

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Примеры . 1. Рассмотрим два простых высказывания :

высказывание A – "5 – простое число" и высказывание B – "2+4=8".

Из высказываний A и B с помощью союза "И" построим сложное высказывание (конъюнкцию) " 5 есть простое число и 2+4=8", которое в символах можно записать так : $A \wedge B$.Оно,очевидно, ложно.

2. Пусть имеем высказывание A –"сегодня идет дождь" и высказывание " B – "сегодня идет снег". Тогда сложное высказывание из данных высказываний A и B будет таким : "сегодня идет дождь и снег" .

В символах это высказывание запишется так : $A \wedge B$.

3. Рассмотрим сложное высказывание : "студент пришел на лекцию и изучение логики – полезное дело". Это высказывание можно расчленить на простые высказывания, соединенные союзом "И" и записать в символах так $A \wedge B$, где
A – высказывание "студент пришел на лекцию ",
B – высказывание "изучение логики полезное дело".

Пусть A и B допустимые высказывания. Построим сложное высказывание с помощью союза "ИЛИ" :

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дизъюнкцией высказываний A и B или их логическим сложением называется высказывание , которое считается истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний A и B . Это новое высказывание обозначается $A \vee B$ или A + B.
В соответствии с определением операции дизъюнкции запишем для нее таблицу истинности :

A	B	$A \vee B$
л	л	л
л	и	и
и	л	и
и	и	и

или

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

П Р И М Е Р. Рассмотрим два простых высказывания: высказывание А – "9 < 15" и высказывание В – "9=15". Из высказываний А и В с помощью союза "ИЛИ" построим сложное высказывание "9 < 15 ИЛИ 9=15". Последнее высказывание можно записать более проще в виде "9 ≤ 15", а в символах это высказывание запишется следующим образом: $A \vee B$.

Для допустимых высказываний А и В могут быть связаны союзом " ЕСЛИ....., ТО ...".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Импликацией высказываний А и В называется высказывание, которое считается истинным, если А и В оба истинные или если А – ложное, В– какое угодно.

Обозначается импликация высказываний А и В так: $A \to B$.

Читается: ЕСЛИ А, ТО В".

Составим таблицу истинности для операции в соответствии с определением 4:

A	B	$A \to B$
и	и	и
л	и	и
л	л	и
и	л	л

A	B	$A \to B$
1	1	1
0	1	1
0	0	1
1	0	0

Таким образом, высказывание "$A \to B$" ложно в единственном случае, когда А истинное высказывание, а В – ложное. В форме импликации можно записать любую теорему. При такой записи высказывание А называют условием, а высказывание В – заключением теоремы.

В импликации "$A \Rightarrow B$" посылка A и заключение B не обязательно связаны с между собою по содержанию. В том случае, когда такая связь есть, то импликация "ЕСЛИ A, ТО B" называется отношением следования и обозначается так: $A \Longrightarrow B$.

Таким образом, отношение следования является частным случаем импликации.

В школьном курсе математики будут использоваться отношения следования, т.к. все почти импликации связаны по содержанию.

Пример. Высказывание "Если сумма цифр некоторого числа делится на 9, то само число делится на 9" символически может быть записано так: "$A \Longrightarrow B$", где

A – "сумма цифр некоторого числа делится на 9",

B – "само число делится на 9".

Высказывание "$A \Longrightarrow B$" имеет тот же смысл, что и высказывание:

1) "A есть достаточное условие для B",

2) "B есть необходимое условие для A".

Поясним понятия "необходимость" и "достаточность" на примерах.

В высказывании "Если идет дождь, то на небе есть тучи" высказывание "если идет дождь" является достаточным для высказывания "На небе есть тучи". А вот высказывание "На небе есть тучи" является необходимым для высказывания "Идет дождь", т.к. тучи на небе могут быть, а дождя может и не быть.

Составим таблицу истинности высказываний "Если идет дождь, то на небе есть тучи".

Обозначим: A – "Идет дождь", B – "На небе есть тучи".

A	B	$A \Rightarrow B$
Идет дождь	есть тучи	И
Нет дождя	есть тучи	И
Идет дождь	нет туч	Л
Нет дождя	нет туч	И

Высказывание "А $\Rightarrow$ В" можно сформулировать и так: "Для того, чтобы было В, достаточно чтобы было А" или "Для того, чтобы было А, необходимо чтобы было В".

Пример. Дано высказывание: "Чтобы число делилось на 5 . ...., чтобы последняя цифра числа была 5". Многоточие заменить одним из двух слов, "необходимо" или "достаточно".

Введем обозначения. Пусть высказывание А – "Число делится на 5", а высказывание В – "Последняя цифра числа 5". Строим высказывание "А $\Rightarrow$ В", т.е. "Если число делится на 5", то последняя цифра его 5". Строим высказывание "В $\Rightarrow$ А", т.е. "Если последняя цифра числа 5, то число делится на 5".

Какое из этих двух высказываний истинное? Анализируем первое. Это высказывание ложное, т.к. на 5 могут делиться и числа, оканчивающиеся не на 5 (например, число 240). Второе высказывание истинное, т.к. если последняя цифра 5, то число делится на 5. Отсюда следует, что высказывание В есть достаточное условие для А, но не необходимое. Поэтому после замены точек получим высказывание "Чтобы число делилось на 5, достаточно, чтобы его последняя цифра была 5".

Два допустимых высказывания А и В могут быть связаны союзом" .... ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ТОГДА .....".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Эквиваленцией высказываний А и В называется высказывание, которое считается истинным, если высказывание А и В одновременно истинные или ложные. Обозначение эквиваленции : "А $\Leftrightarrow$ В". Читается "А эквивалентно В".
Таблица истинности высказывания "А $\Leftrightarrow$ В".

А	В	А$\Leftrightarrow$В	А	В	А$\Leftrightarrow$В
И	И	И	1	1	1
Л	Л	И	0	0	1
Л	И	Л	0	1	0
И	Л	Л	1	0	0

В том случае, когда члены эквиваленции связаны по содержанию, то эквиваленция " А .... ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ..... В" называется отношением эквивалентности , которое является частным случаем эквиваленции и обозначается "А $\Leftrightarrow$ В". При одновременной истинности прямой и обратной теорем их можно записать в виде сложного высказывания типа эквиваленции.

Пример . Прямая теорема. "Если сумма цифр некоторого числа делится на 3, то само число делится на 3"
Обратная теорема. "Если само число делится на 3, то сумма его цифр делится на 3".

Прямую и обратную теоремы можно записать символически.
Пусть высказывание А– Сумма цифр делится на 3", высказывание В – "Само число делится на 3:. Прямая теорема : "А $\Rightarrow$ В", обратная теорема : "В $\Rightarrow$ А". Конъюнкция прямой и обратной теоремы символически записывается так :

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) :$$

Отсюда следует, что В есть необходимое условие для А и В есть достаточное условие для А.
Поэтому высказывание " А $\Leftrightarrow$ В" имеет тот же смысл, что и высказывания :

а) "А тогда и только тогда, когда В",
б) "Если А, то В и, если В, то А " ,
в) "В есть необходимое и достаточное условие для А ".

Пример. Дано высказывание "Чтобы число делилось на 72 ....., чтобы оно делилось на 8 и 9". Нужно точки заменить одним из трех выражений :
"необходимо", "достаточно", необходимо и достаточно".

Составим две импликации .

а) "Если число делится на 72, то оно делится на 8 и 9",
б) "Если число делится на 8 и 9 , то оно делится на 72".

Выясним значение истинности этих высказываний .
Высказывание а) истинное, т.к. число 72 = 8· 9 ,
высказывание б) тоже истинное, т.к. наименьшее общее кратное чисел 8 и 9 есть число 72.
Таким образом, имеют место истинность обеих импликаций :
"А $\Rightarrow$ В" и "Е $\Rightarrow$ А ". Следовательно, вместо точек нужно

ставить выражение "необходимо и достаточно".

Итак, мы рассмотрели пять логических операций над высказываниями:

$\bar{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$.

С помощью введенной символики можно прочитать или записать более сложные логические высказывания.

Г Л А В А 2.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Основные понятия и определения.

Понятие множества является первоначальным, неопределенным, т.е. речь может идти о пояснении смысла этого понятия, об описании его. К понятию "множество" мы приходим, проводя мысленное объединение некоторых предметов в единое целое. При этом чаще всего эти предметы объединяются по некоторому присущему им всем признаку, свойству, качеству и другим особенностям. Говорят, что множество состоит из этих объединяемых предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845–1918) выразил понятие множества словами:

"Множество есть многое, мыслимое, как единое".

Вместе с понятием "множество" вводится также неопределимое отношение "принадлежать". Например, число 9 принадлежит множеству натуральных чисел, буква "а" принадлежит множеству букв русского алфавита и т.д. Вместо того, чтобы говорить "объект принадлежит множеству", говорят также, что "объект является элементом множества"

Предметы (объекты), составляющие множество называют его элементами. Множества обозначаются большими буквами латинского алфавита: А, В, С, Д, ... М, Р, и т.д. , а их элементы малыми буквами : х, у, а, б и т.д. . Принадлежность элемента множеству будем обозначать знаком $\in$ и писать $x \in A$, если х является элементом множества A . Если же х не является элементом множества А, то будем писать $x \notin A$.

Примеры 1. А – множество студентов в группе.
а – студент группы, $a \in A$.

2. А – множество точек на окружности.
М – точка окружности, $M \in A$.

Будем считать, что всякое свойство определяет некоторое множество. С этой широкой точки зрения можно, например, говорить о множестве всех действительных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + 1 = 0$$

Вместе с тем ясно, что в этом множестве нет ни одного элемента.

Множество, не содержащее ни одного элемента, будем называть пустым и обозначать его будем символом $\emptyset$.

Элемент "a" множества A не следует смешивать с так называемым одноэлементным множеством, состоящим из единственного элемента a (обозначается символом $\{a\}$). Символом $\{a,b\}$ обозначается множество, состоящее из двух элементов и т.д.

§ 2. Понятие подмножества.

Пусть A – множество студентов группы СП-91,

B – множество тех студентов этой группы, которые учатся хорошо. Между этими множествами существует определенное отношение: каждый элемент множества B является в тоже время и элементом множества A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество N называется подмножеством (частью) множества M, если каждый элемент N является элементом M. Такое отношение часто выражают словами "множество включается (включено) в множество M и записывают символически следующим образом: $N \subset M$

Очевидно, что для любого множества M можно записать: $M \subset M$

Запись $M \subsetneq N$ будет в дальнейшем означать символ включения в расширенном смысле, не исключая случая, когда оба множества включаемое и включающее – совпадают. В рассмотренном выше примере можно записать $B \subset A$.

Примеры. Введем обозначения :

N – множество всех натуральных чисел ,
Z – множество всех целых чисел ,
Q – множество всех рациональных чисел ,
R – множество всех действительных чисел,
$Ц$ – множество всех комплексных чисел.

Можно записать следующие отношения включения : $N \subset Z \subset Q \subset R \subset Ц$

Следует различать записи : $B \in A$, $B \subset A$

Первое из них означает, что множество B является элементом некоторого множества A, а второе – что множество B является подмножеством множества A.

§ 3. ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. КВАНТОРЫ

Ранее были рассмотрены выражения типа высказываний, имеющие фиксированное значение истинности. В этом параграфе рассмотрим высказывательные формы или функции, т.е. выражения, которые содержат так называемые предметные переменные.

Предметной переменной называется символ x, который участвует в образовании некоторого выражения и который можно заменить в этом выражении любым элементом некоторого множества M.

Про переменную „x" будем говорить : „x" изменяется на множестве M или „x" – предметная переменная на множестве M".

Часто букву Φ понимают, как символ свойства, которым обладает элемент „x" множества M. Само множество M будем рассматривать как область определения высказывательной функции $\varphi(x)$.

Примеры.

1. $\varphi_1(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. $\varphi_2(x)$: $x > 0$
3. $\varphi_3(x)$: $x^2 < 1$
4. $\varphi_4(x)$: " город находится в Алтайском крае"

Функции $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ определены, например, на множестве всех рациональных чисел, $\Phi_4(x)$ – на множестве Е всех городов Западной Сибири.

Заменяя предметную переменную „x" высказывательной функции различными элементами множества М, можно получить высказывания которые могут быть как истинными так и ложными.

Пусть высказывательная функция определена на множестве М и a некоторый фиксированный элемент этого множества М. Тогда символом $\Phi(a)$ будем обозначать значение истинности высказывания, которое получится при замене символа x в функции $\Phi(x)$ элементом a, принадлежащему множеству М. Этим же символом обозначают и само это высказывание.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие высказывательные функции $\Phi(x)$, которые при замещении в них x любым конкретным элементом множества М превращаются в истинное или ложное высказывание (записанное в словесной или символико-математической форме).

Такие функции называют еще предикатами.

Так, в первом примере $\Phi_1(1) = и$, $\Phi_2(2) = и$, а $\Phi_1(4) = л$,

во втором примере $\Phi_2(1) = и$, $\Phi_2(-5) = л$ и т.д.

в третьем примере $\Phi_3(0) = и$, $\Phi_3(2) = л$, $\Phi_3(-0{,}5)$ и т.д.

В четвертом примере высказывание "Город Бийск находится в Алтайском крае" – истинное, а "Город Омск находится в Алтайском крае" – ложное высказывание.

Говорят, что элемент „a" множества М удовлетворяет высказывательной функции $\Phi(x)$, если высказывание, полученное из $\Phi(x)$ заменой „x" на „a" $\Phi(a)$ истинно.

Если каждый элемент множества М удовлетворяет высказывательной функции $\Phi(x)$, то будем записывать символом: $\forall_{x \in M} \Phi(x)$, который читается так: для каждого „x", принадлежащего множеству М, $\Phi(x)$ – истинное или: каждый элемент множества М обладает свойством Ф.

Аналогично символ $\exists_{x \in M} \Phi(x)$ читается так: для некоторого „x",

Гос. публичная научно-техническая библиотека СССР

принедлежащего множеству M, $\Phi(x)$ истинно или : Существует, по крайней мере один элемент „x" множества M, который обладает свойством Ф.

Символ $\exists! \Phi(x)$ следует читать так : существует один и $x \in M$ только один элемент „x" , принадлежащий множеству M, который обладает свойством Φ .Символы $\forall_x$ и $\exists_x$ называются кванторами, при этом $\forall x$ – квантор всеобщности по переменному x , $\exists x$ – квантор существования по переменному x . Эти кванторы иногда называют логическими. операторами.

Множество тех (и только тех объектов), которые обладают некоторым свойством Φ будем записывать символически следующим образом :

$$M = \{ x / \Phi(x) \}$$

При этом „x" следует трактовать абстрактно, как объем множества любой природы.

Если на множестве M определена высказывательная функция (предикат) $\Phi(x)$ то таким же символом $\{x/\Phi(x)\}$ будем обозначать так называемую область истинности высказывательной функции (предиката) $\Phi(x)$, т.е. множество всех тех (и только тех) элементов множества M, при замещении которых символом x в $\Phi(x)$ получается истинное высказывание

$$M = \{ x / \Phi(x) \}$$

Очевидно, $M^* \subseteq M$

В примерах 1–4 можно записать символически :

$$M_1^* = \{ x / \Phi_1(x) \} = \{ x / x^2 - 3x + 2 = 0 \} = \{ 1, 2 \}$$
$$M_2^* = \{ x / \Phi_2(x) \} = \{ x / x > 0 \} = (0, \infty)$$
$$M_3^* = \{ x / \Phi_3(x) \} = \{ x / x^2 < 1 \} = (-1, 1)$$

На одном и том же множестве M можно ввести две предметные переменные x и y рассмотреть высказывательные функции этих переменных $\Phi(x, y)$ (их называют еще двухместными предикатами).

Под областью истинности такой функции будем понимать множество всех таких (и только таких) пар элементов, взятых из множества M в определенном порядке, что при замещении x в $P(x,y)$ первым элементом пары и y – вторым элементом пары – получится истинное высказывание.

Эта область истинности будем обозначать так:

$$M^* = \{(x,y) \mid P(x,y)\}$$

Аналогично могут быть рассмотрены высказывательные функции трех, четырех и т.д. переменных и их области истинности.

Примеры. 1. На множестве $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ рассматриваются две предметных переменных x и y, высказывательная функция (двухместный предикат) $P(x,y)$: $x < y$

Очевидно, $P(1,2) = u$, $P(4,3) = л$

2. На множестве всех городов Алтайского края вводятся предметные переменные x и y высказывательная функция этих переменных $P(x,y)$: "x по числу жителей больше y"

Тогда P (Барнаул, Рубцовск) $= u$

P (Алейск, Бийск) $= л$

К двухместному предикату $P(x,y)$ можно слева приставить два квантора одинаковых или различных, один по переменному "x" а другой по переменному "y". Например $\forall_x \exists_y P(x,y)$. Этот символ можно прочитать словами так: "для любого элемента "x" множества M в этом множестве участвует такой элемент "y" что $P(x,y)$ истинное". Такое высказывание может быть либо истинным либо ложным.

§ 4. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ.

Существует несколько способов задания множеств.

1. СПОСОБ. Множество может быть задано простым перечислением элементов.

Пример. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество всех неотрицательных чисел, не больше 9.

$B = \{ 0,1 \}$

$C = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Первый способ пригоден, если множество конечно и невелико.

2 СПОСОБ. Множество M может быть задано путем указания общего свойства всех его и только его элементов. В соответствии с принятой в прошлом параграфе символикой его можно записать так : $M = \{ x / \Phi(x) \}$

Примеры 1. Рассмотрим множество всех действительных чисел, больших „a" и меньших „b" (общее свойство)

Полученное множество есть $M = \{ x / x \in R \wedge a < x < b \}$

2. Рассмотрим натуральные числа, меньше 100. Общее свойство этих объектов – быть натуральным числом, меньшим 100. Множество их символически можно записать следующим образом : $M = \{ x / x \in N \wedge x < 100 \}$

5. ТИПЫ МНОЖЕСТВ.

Множества можно разделить на два типа : конечные и бесконечные.

Конечные множества – множества, содержащие конечное число элементов в противном случае множество называется бесконечным. Примеры конечных множеств :

1. Корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ образуют конечное множество $A = \{ 1,2, \}$

2. Множество деталей, изготовленных автоматом за некоторый фиксированный промежуток времени.

3. Множество задач в домашнем задании.

4. Множество всех учебных занятий, посещаемых студентом за 5 лет обучения.

Примеры бесконечных множеств.

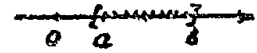
1. Множество точек на прямой.
2. Множество всех натуральных чисел.
3. Множество всех действительных чисел.

Бесконечные множества в свою очередь делятся на счетные и несчетные. Счетное множество – множество, элементы которого можно пронумеровать с помощью чисел натурального ряда. Если этого сделать нельзя, множество называется несчетным.

Примеры счетных множеств.

1. Множество всех решений тригонометрического уравнения вида $\sin x = a$, где $|a| \leq 1$
2. Множество N (натуральных чисел).
3. Множество Z (целых чисел.)
4. Множество Q (рациональных чисел).

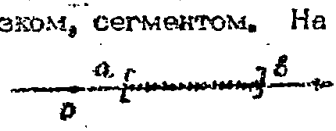
Примеры несчетных множеств.

1. Множество R (действительных чисел).
2. Множество точек на отрезке $[a, b]$: 

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА .

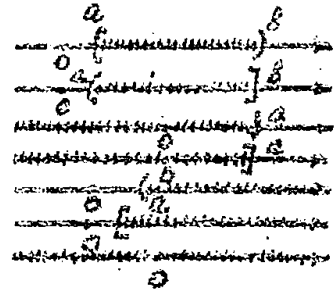
Рассмотрим точечные множества числовой оси.

1. Множество $E = (a, b) = \{x / a < x < b\}$ называется открытым интервалом. Это множество на числовой оси выглядит следующим образом :

2. Множество $E = [a, b] = \{x / a \leq x \leq b\}$ называется закрытым интервалом , отрезком, сегментом. На числовой оси оно выглядит так : 

Аналогично вводятся и иллюстрируются геометрически следующие множества :

3. $E = [a, b) = \{x / a \leq x < b\}$,
4. $E = (a, b] = \{x / a < x \leq b\}$,
5. $E = (-\infty, a) = \{x / -\infty < x < a\}$,
6. $E = (-\infty, a] = \{x / -\infty < x \leq a\}$,
7. $E = (a, +\infty) = \{x / a < x < \infty\}$,
8. $E = [a, \infty) = \{x / a \leq x < \infty\}$,
9. $E = (-\infty, \infty) = \{x / -\infty < x < \infty\}$,



Множества 1–4 называются промежутками числовой оси. Для них вводится общее обозначение $\langle a, b \rangle$. Его употребляют, когда хотят подчеркнуть, что для рассуждений несущественно, входят ли числа a и b во множество или не входят.

§ 7. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пересечением двух множеств A и B называется множество состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множеству A и множеству B.

Для этой операции вводится символ $A \cap B$

Значит, наше определение можно записать следующим образом:

$$A \cap B \stackrel{df}{=} \{m / m \in A \wedge m \in B\}.$$

Примеры. Пусть A – множество всех прямоугольников данной плоскости α,

B – множество всех квадратов плоскости.

2. A – множество натуральных чисел, делящихся на 2,

B – множество натуральных чисел, делящихся на 3.

Тогда ввиду того, что числа 2 и 3 взаимно простые, $A \cap B$ – множество чисел, делящихся на 6.

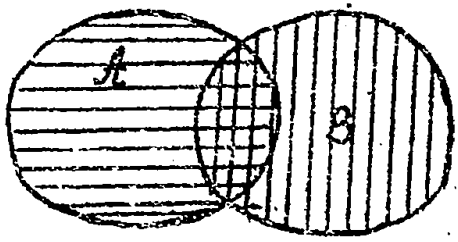
3. A – множество положительных чисел,
B – множество отрицательных чисел. Тогда $A \cap B = \emptyset$ пустое множество.

4. Найти множество решений системы уравнений :

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Множество решений первого уравнения $M_x^{(1)} = \{0, 1\}$,
второго $M_x^{(2)} = \{1, 2\}$

Тогда множество решений системы $M_x = M_x^{(1)} \cap M_x^{(2)} = \{0,1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$
Искомое множество – одноэлементное : единственное решение системы $x = 1$.
Геометрически операцию пересечения множеств можно представить следующим образом :



$A \cap B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.
Для этой операции вводится символ $A \cup B$.
Тогда наше определение можно записать : $A \cup B = \{m / m \in A \vee m \in B\}$

ЗАМЕЧАНИЕ : если $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B$ будем обозначать A + B.

Примеры :1 . Множество всех вещественных чисел можно записать так :

$R = Q \cup J$, где J – множество всех иррациональных чисел, Q – множество всех рациональных чисел.

2. $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

3. Найти множество решений неравенства : $|x-3|>5$

$|x-3|>5 \Leftrightarrow (x-3>5) \vee (x-3<-5) \Leftrightarrow (x>8) \vee (x<-2)$

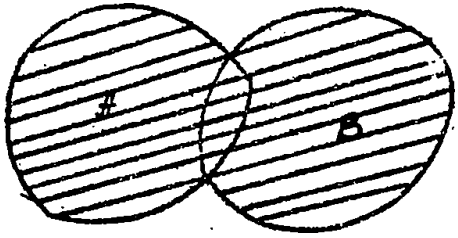
$M_x = (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$.

4. Решить уравнение : $(x^2-x)(x^2-3x+2)=0$

$(x^2-x)(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-x=0) \vee (x^2-3x+2=0)$

$M_x = \{0,1\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\}$.

Геометрическая иллюстрация операции объединения :



$A \cup B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Разностью множеств A и B называется множество Д, состоящее из всех элементов множества A, не входящих в множество B.

Для операции вводится символическое обозначение : $Д = A \setminus B$

Значит по определению $\mathcal{D} = A \setminus B \stackrel{df}{=} \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$

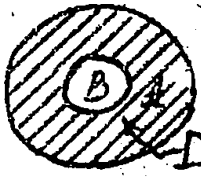
ЗАМЕЧАНИЕ : Если B есть подмножество множества A, то разность $A \setminus B$ называют дополнением множества B до множества A и обозначают символом $C_A B$.

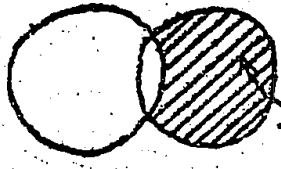
Значит, $B \subseteq A \Rightarrow C_A B \stackrel{df}{=} A \setminus B$

Примеры 1. Разность множества целых чисел и множества нечетных чисел есть множество четных чисел.

2. Дополнением сегмента $[0,1]$ до множества R служит множество $C_R [0,1] = (-\infty, 0) \vee (1, +\infty)$

Геометрическая иллюстрация вычитания множеств



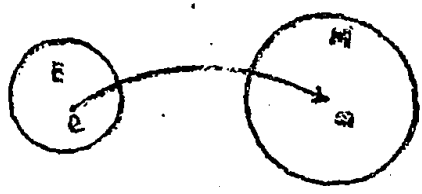


§8 Отображение множеств.

Пусть даны два множества E и M элементов любой природы. Определение. Отображением множества E в множество M называется правило, закон, по которому каждому элементу множества E ставится в соответствие некоторый элемент множества M.

Если закон отображения обозначить через f, любой элемент множества E через "e", элемент множества M, поставленный в соответствие элементу "e" через m, то операцию отображения множеств символически можно записать в виде: $m = f(e)$ или $f: e \to m$, или $f: E \to M$

Геометрически операцию множеств отображения будем изображать так:

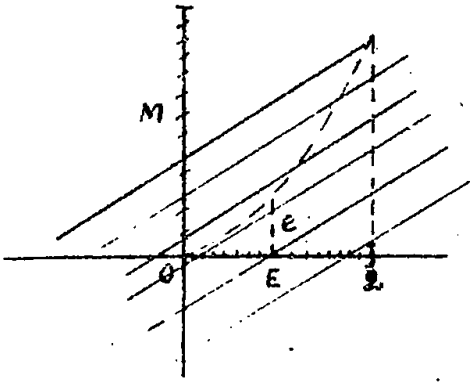


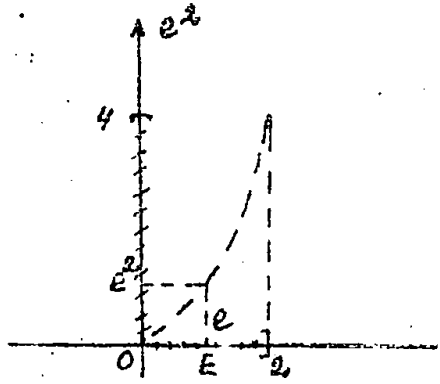
Примеры. 1. Пусть даны два числовых множества: $E = [0, 2]$ и $M = [0, 4]$. Нужно подобрать закон отображения f таким образом, чтобы множество E отобразилось в множество M. В качестве такого отображения можно взять закон

$$f: e \to e^2$$

Можно дать геометрическую интерпретацию операции

отображения множества $E = [0, 2]$ в множество M.





2. Пусть даны два множества: $E = R$ и $M = R$ нужно подобрать закон отображения

а) $f_1 : e \to e$; б) $f_2 : e \to e + 3$; в) $f_3 : e \to e^3$

Очевидно, что таких законов можно подобрать сколько угодно. *Геометрически каждый из этих законов можно проиллюстрировать так.*

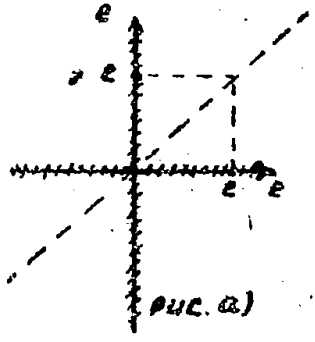


рис. а)

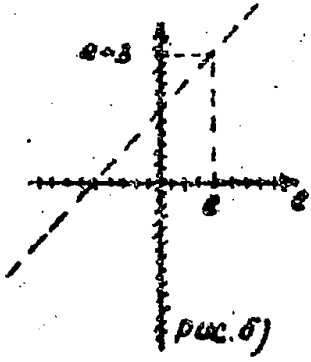


рис. б)

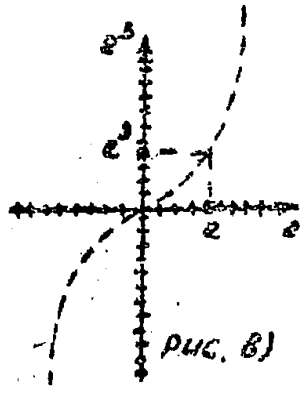


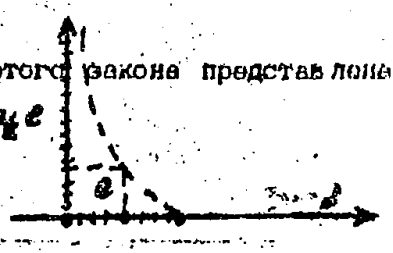
рис. в)

3. Подобрать закон отображения множества $E = (0, 1]$ в множество $M = [0, \infty)$.

В качестве такого отображения можно взять:

$$f : e \to \log_{\frac{1}{2}} e .$$

Геометрическая иллюстрация этого закона представлена на рисунке.



Однако, при отображении одного множества на другое не всегда можно подобрать закон отображения. Например.

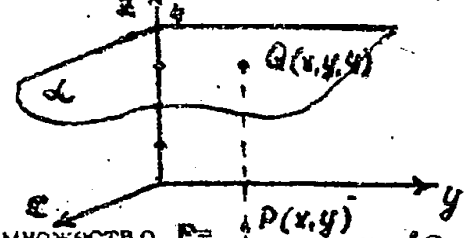
4. Пусть даны два множества: М–множество мест в зрительном зале кинотеатра, Е–множество зрителей, пришедших на очередной сеанс. В этом случае множество Е отображается в множество М, очевидно, что здесь нельзя подобрать закона отображения в виде формулы, а можно его лишь описать.

5. Пусть даны : множество пар вещественных чисел, т.е. объектов вида $z = (x, y)$ где x и y – вещественные числа, т.е. множество $E = \{(x,y) / x \in R \wedge y \in R\}$ и множество из одного элемента $M = \{z = 4\}$.

Нужно подобрать такой закон отображения, чтобы множество Е= отобразилось в множество М.

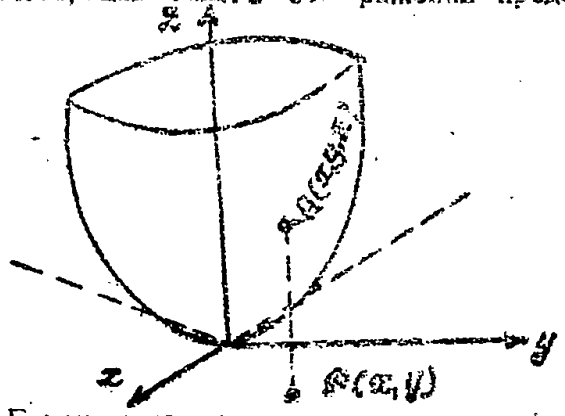
В качестве такого закона можно взять: $f : (x,y) \to 4$

Любой точке P (x,y) координатной плоскости xoy ставится в соответствие точка Q с координатами (x,y,4), т.е. точка Q (x,y,4), лежащая в плоскости α, параллельной плоскости xoy и отстоящей от нее на (+4) единицы. Геометрически это выглядит так:



6. Пусть множество E= $E = \{P(x,y) / x \in R \wedge y \in R\}$. и множество M= $(0, \infty)$. В данном случае в качестве закона отображения можно взять $f : (x,y) \to x^2 + y^2$. Любой точке плоскости XOY ставится в соответствие точка Q неко-

торой поверхности с координатами $Q(x, y, x^2+y^2)$. Геометрическая иллюстрация такого отображения представлена на рисунке.



7. Пусть E–множество всех троек вещественных чисел (x,y,z), а $M=[0,\infty)$. Тогда в качестве закона отображения множества E в множество M можно взять

$$f:(x,y,z)\to x^2+y^2+z^2.$$

Рассмотренные в примерах отображения таковы, что каждому элементу множества E по закону отображения ставится в соответствие строго определенный (значит единственный) элемент множества M. Такие отображения называются <u>однозначными</u>. Если же отображение таково, что каждому элементу множества E (или может только некоторыми из них) ставится в соответствие не один, а несколько (или может быть даже бесконечно много) элементов множества M, то говорят, что отображение <u>многозначное</u>.

Наличие отображения $f: e\to m$ множества E в множество M можно записать в логико-символической форме следующим образом: $\forall e\in E\,\exists m\in M\,(e\to m)$.

$\forall e\in E\,\exists!\, m\in M\,(e\to m)$. Для однозначного отображения:

§9. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА.

Рассмотрим некоторые множества действительных чисел, связанные с понятием модуля действительного числа.

Определение. Модулем действительного числа x называется действительное число x, если $x \geq 0$ или $-x$, если $x < 0$,

т.е. $$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Пример. $|2,5| = 2,5$

$|-2,5| = -(-2,5) = 2,5$

$|0| = 0$

Упражнения. 1. Вычислить арифметические корни: $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{(a-b)^2}$

Ответы: $|a|$, $|a-b|$.

2. Упростить выражение: $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Ответы: $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{если } x \in (0, \infty) \end{cases}$

Простейшие свойства модулей действительных чисел.

1. Модуль любого действительного числа неотрицателен,

т.е $\forall\limits_{x \in R} : (|x| \geq 0)$

2. Всякое действительное число не больше своего модуля,

т.е. $\forall\limits_{x \in R} : (x \leq |x|)$. Легко проверить, что и $-x \leq |x|$

3. Модули любых двух противоположных чисел равны,

т.е. $\forall\limits_{x \in R} : (|x| = |-x|)$. Свойства 1–3 легко проверяются.

4. $\forall\limits_{x \in R} \forall\limits_{\alpha \in R \wedge \alpha > 0} : (|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha)$.

Доказательство.

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и из $|x| < \alpha \Rightarrow x < \alpha \Rightarrow 0 < x < \alpha$ (1)

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и из $|x| < \alpha \Rightarrow -x < \alpha \Rightarrow -\alpha < x < 0$ (2)

Из неравенств (1) и (2) следует, что $-\alpha < x < \alpha$.

Итак, $|x| < \alpha \Rightarrow -\alpha < x < \alpha$.

Справедливо и обратное $-\alpha < x < \alpha \Rightarrow |x| < \alpha$.

Следовательно, $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$.

5. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{\alpha\in R \wedge \alpha > 0}{\forall} : (|x| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha)$.

6. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{\alpha\in R \wedge \alpha > 0}{\forall} : (|x| > \alpha \Leftrightarrow (x < -\alpha) \vee (x > \alpha))$.

7. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{\alpha > 0 \wedge \alpha \in R}{\forall} : (|x| \geqslant \alpha \Leftrightarrow (x \leqslant -\alpha) \vee (x \geqslant \alpha))$.

8. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{\alpha\in R \wedge \alpha > 0 \wedge a \in R}{\forall} : (|x-a| \leqslant \alpha \Leftrightarrow a-\alpha \leqslant x \leqslant a+\alpha)$

9. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{\alpha\in R \wedge \alpha > 0 \wedge a \in R}{\forall} : (|x-a| \geqslant \alpha \Leftrightarrow (x \leqslant a-\alpha) \vee (x \geqslant a+\alpha))$.

10. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{y\in R}{\forall} : (|x+y| \leqslant |x| + |y|)$.

11. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{y\in R}{\forall} : (|x-y| \geqslant |x| - |y|)$.

12. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{y\in R}{\forall} : (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|)$.

13. $\underset{x\in R}{\forall}\ \underset{y\in R}{\forall} : \left(\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\right)$.

Свойства 4–13 доказываются аналогично тому, как было доказано свойство 4.

§ 10. Понятие окрестности точки.

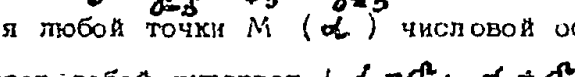
Пусть дана некоторая точка M_0 (на числовой оси, в координатной плоскости ХОУ, в пространстве с системой координат ОХУZ).

Определение. Окрестностью точки M_0 радиуса δ ($\delta > 0$) или δ-окрестностью точки M_0 называется множество точек $\{M\}$ (соответственно оси, плоскости, пространства), удовлетворяющих условию $|MM_0| < \delta$, где $|MM_0|$ – расстояние между точками M и M_0.

Для этого множества вводится обозначение: $U_\delta(M_0)$.
Будем его называть окрестностью точки M радиуса δ.
Значит, по определению $U_\delta(M_0) = \{M / |MM_0| < \delta\}$.

Примеры. 1. Построить на числовой оси окрестность $U_5(+5)$.

M_0 (+5)–данная точка. Пусть x–абцисса точки M, лежащей на оси И. Тогда согласно определению $U_5(+5) = \{M(x) / |MM_0| < 5\} =$
$= \{M(x) / |x-5| < 5\} = \{M(x) / -5 < x-5 < 5\} = \{M(x) / 0 < x < 10\}$.
Значит, $U_5(+5) = (0,10)$. На числовой оси окрестность $U_5(+5)$ выглядит так:



Вообще для любой точки M (α) числовой оси ее δ окрестность представляет собой интервал $(\alpha - \delta;\ \alpha + \delta)$

2. Построить в плоскости ХОУ окрестность $U_3(O(0,0))$. Согласно определению $U_3(O(0,0)) = \{M(x,y) / |OM| < 3\}$

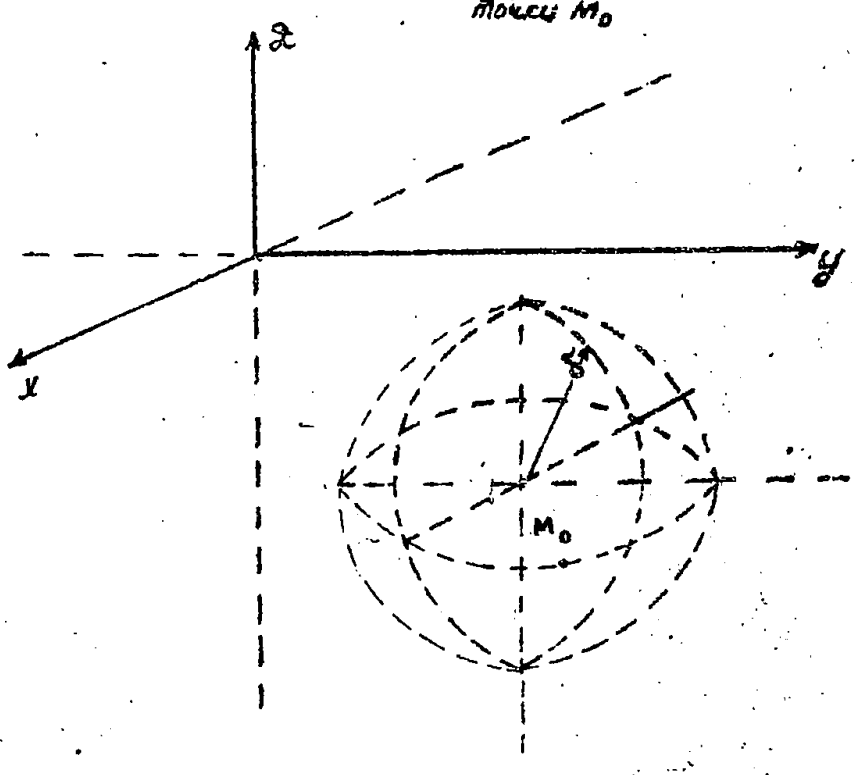
$= \{M(x,y) / \sqrt{x^2+y^2} < 3\} = \{M(x,y) / x^2+y^2 < 9\}$.

Множество всех точек, лежащих внутри круга, имеющие центром начало координат и радиус которого $\delta = 3$.
Вообще, δ – окрестность точки M_0 (x_0, y_0) в плоскости XOY – множество всех точек этой плоскости, лежащих внутри круга радиуса δ, имеющего центр в точке M_0 (x_0, y_0). Координаты любой точки M (x, y) этой окрестности удовлетворяют неравенству: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$.

В пространстве – „δ – окрестность" точки M_0 (x_0, y_0, z_0) – множество всех точек пространства, лежащих внутри сферы радиуса δ с центром в точке M_0 (x_0, y_0, z_0). Координаты любой точки $M(x, y, z)$ этой окрестности удовлетворяют неравенству:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \delta^2$$

Геометрически δ – окрестность точки M_0 можно изобразить так:



Глава III.

УЧЕНИЕ О ФУНКЦИЯХ.

Рассмотрение множеств с элементами любой природы и отображение одних множеств в другие приводит нас к понятию функции, которое мы можем сформулировать на уровне теоретико-множественной основы современной математической науки.

Определение. Отображение $f : E \to M$ называется функцией, определенной на множестве E и принимающей значения в множестве M.

Иногда говорят, что функция есть совокупность трех вещей; множества E, множества M и закона f, по которому каждому элементу множества E ставится в соответствие некоторый элемент множества M.

В отображении участвует все множество E. Предметную переменную x, изменяющуюся на этом множестве, назовем независимой переменной или аргументом функции. В соответствии с этим элементы множества E будем называть значениями независимой переменной или значениями аргумента. Элементы множества M, поставленные в соответствие элементам E по закону f называются значениями функции. Всякому значению аргумента, в силу вышесказанного, будет соответствовать некоторое значение функции. Множество E всех значений аргумента называется областью определения (или существования) функции. Множество M^* всех значений функции называется областью изменения функции. Очевидно $M^* \subseteq M$, ибо наше определение функции не включает того, что некоторые

элементы множества M окажутся не поставленными в соответствие каким-либо элементам множества E.

Обозначим предметную переменную на E через "e" и предметную переменную на M через m, и будем писать следующее символическое равенство:

$$m = \varphi(e)$$

Это равенство читают так: „переменная m есть функция независимой переменной (или аргумента) "e" (коротко: — "эм есть эф от е").

Переменную m будем называть <u>зависимой переменной</u>. Буква φ, символизирующая закон, по которому элементам множества E ставятся в соответствие элементы множества M, называется <u>характеристикой функции</u>.

В качестве характеристик функций употребляют кроме φ, буквы ψ, χ, Φ, эти же буквы с индексами, например φ_2, χ_3, Φ_1 и т.д. Иногда в качестве характеристики функций употребляют букву, которой обозначена сама зависимая переменная. В этом случае пишут: $m = m(e)$.

Итак, задание функции требует задания трех объектов: области определения E, множества M, в котором функция принимает свои значения и закона φ, который часто называют <u>законом функциональной зависимости</u>.

§1 Действительные функции одного и нескольких переменных.

Определение. Функция $f: E \to M$ называется действительной функцией одного действительного аргумента, если E и M – некоторые множества действительных чисел, т.е. подмножества множества R.

Для таких функций значения аргумента и значения функции – действительные числа. В дальнейшем под M для таких функций будем понимать M^*, т.е. множество всех значений функции.

Предметные переменные на множествах E и M (аргумент и зависимую переменную) для действительных функций действительного аргумента чаще всего обозначают символами x и y, в соответствии с чем функцию можно записать так: $y = f(x)$

Значение функции, соответствующее определенному значению аргумента x_0 обозначают через y_0 или $f(x_0)$, или $[f(x)]_{x=x_0}$

В соответствии с принятым обозначением действительных чисел точками числовой оси символ $f(x_0)$ часто читают так: "Значение функции в точке x_0".

§ . Действительные функции нескольких действительных переменных.

Рассмотрим некоторое множество E упорядоченных пар действительных чисел, т.е. таких пар, в которых различают первое и второе число. Таким образом, E есть множество объектов вида (x,y), где действительное число x – первый элемент пары, а действительное число y – второй.

Рассмотрим отображение множества E в некоторое множество действительных чисел M, осуществляющееся по закону φ : $\varphi : E \to M$

Определение. Отображение $\varphi : E \to M$ называется функцией двух независимых переменных (аргументов).

Символическая запись: $z = \varphi(x, y)$

Введем множества: E_x – множество всех первых чисел пар, составляющих множество E и E_y – множество всех вторых чисел этих пар.

Тогда x и y будем рассматривать как независимые переменные, изменяющиеся соответственно на множествах E_x и E_y.

Через z обозначено число, поставленное в соответствие паре чисел $(x, y,)$ по закону φ. Этот символ можно рассматривать, как предметную переменную на некотором множестве действительных чисел $M^* \subseteq M$.

Область определения функции $z = \varphi(x, y)$ может быть записана теперь так:

$$E = \{(x, y) / x \in E_x \wedge y \in E_y\}.$$

Множество M^* – область изменения функции $\varphi(x, y)$.

Пара чисел (x, y) можно поставить в соответствие точку P координатной плоскости XOY, для которой x – абцисса и y-ордината. Тогда каждой паре чисел из множества E будет соответствовать определенная точка плоскости XOY и, таким образом, об область определения функции $z = \varphi(x, y)$ можно геометрически истолковать, как некоторое множество точек в плоскости XOY.

Тогда рассматриваемая функция двух независимых переменных может быть истолкована как некоторая функция точки $P_{(x,y)}$ в плоскости ХОУ: $z = f(P)$

пусть взята пара конкретных чисел (x_0, y_0) из области определения E. Тогда символом $f(x_0, y_0)$ будем обозначать значение функции $z = f(x, y)$, соответствующее паре значений аргументов x_0 и y_0. Это значение можно называть так же значением функции в точке $P_0(x_0, y_0)$, а записать его можно так:

$$f(P_0) \text{ или } [f(P)]_{P_0} \text{ или } [f(x)]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \text{ или } z_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Рассматривая некоторое множество E упорядоченных троек, четверок и т.д. действительных чисел вида (x, y, z), (x, y, z, t) и т.д., и его отображение и множество действительных чисел M, придем к понятию функции трех, четырех и и т.д. независимых переменных. Терминологию и символику принятые для функций двух переменных, можно перенести и на функции большего числа аргументов. В частности, функцию трех независимых переменных $u = f(x, y, z)$ можно рассматривать как некоторую функцию точки $P(x, y, z)$ в пространстве $XOYZ$.

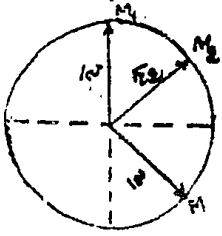
Некоторые другие типы функций.

Видоизменяя, конкретизируя природу элементов множеств E и M и рассматривая осуществляемые по некоторому закону отображения E в M, мы можем придти к многим другим типам функций. Например: (1). E – множество действительных чисел,

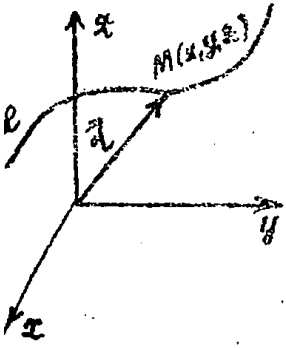
M–множество векторов в плоскости или в пространстве.

Отображение $\varphi : E \to M$ называется вектор-функцией скалярного аргумента. Обозначение: $\vec{r} = \varphi(t)$ или $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Независимая переменная– t – скаляр., зависимая переменная– $\vec{a}$ – –вектор.

(2) E–множество векторов (в плоскости или пространстве.) M–множество действительных чисел. Отображение $\varphi : E \to M$ называется скалярной функцией векторного аргумента. Обозначение: $x = \varphi(\vec{a})$. Примеры. Пусть точка M движется прямолинейно под действием постоянной силы $\vec{F}$. Тогда в момент времени t_1 точка пройдет путь $\vec{S}_1$, в момент t_2 – $\vec{S}_2$ и т.д., т.е. $\vec{S} = \vec{S}(t)$ – путь есть вектор-функция от времени t.



2. Пусть точка M под действием некоторой силы совершает вращательное движение. Тогда в момент t_1 точка будет находиться в положении точки M_1 и это положение будет определяться вектором $\vec{r}_1$, в момент t_2 ее положение будет определяться вектором $\vec{r}_2$ и т.д., т.е. в любой момент времени t положение точки будет определяться переменным вектором $\vec{r}(t)$



3. Если точка движется по любой линии $\mathcal{L}$, то ее положение будет определено в любой момент времени t вектором $\vec{r}$. Геометрическое место точек концов векторов, являющихся значениями вектор-функции скалярного аргумента, образуют некоторую линию, которая называется графиком векторной функции или чаще годографом.

Уравнение годографа (траектории) будем записывать в виде векторного равенства $\vec{z} = \vec{z}(t)$.

Замечание. Переменный параметр t в векторной функции скалярного аргумента обычно участвует в качестве временного параметра. Поэтому векторные функции скалярного аргумента широко используются в курсе теоретической механики.

(3). Если E и M – некоторые множества векторов, то отображение называется вектор-функцией векторного аргумента.

Обозначение: $\vec{v} = f(\vec{a})$ или $\vec{v} = \vec{v}(\vec{a})$

(4). E – множество действительных чисел, M–множество комплексных чисел. Отображение $f: E \to M$ называется комплексной функцией действительного аргумента. Обозначение: $w = f(t)$.

(5). E и M – некоторые множества комплексных чисел. Отображение $f: E \to M$ называется комплексной функцией комплексного аргумента.

Обозначение: $w = f(z)$

Подобные типы могут быть рассмотрены и для функций нескольких переменных. У функций рассмотренных типов некоторые переменные имели числовую природу, а некоторые не были числовыми переменными (зависимая переменная у функций типа (1), аргумент у функций типа (2), аргумент и зависимая переменная в типе (3).

Различают несколько способов задания функций в зависимости от того, в какой форме выражен закон отображения области определения в область изменения. Рассмотрим некоторые

ки таких способов, остановясь в рамках рассмотрения числовых функций числовых аргументов.

§ 3. Аналитический способ задания функции.

При таком способе задания фиксируется совершенно определенный комплекс математических операций. В него прежде всего включаются алгебраические операции над числами: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня с натуральным показателем. Позже в этот комплекс мы включим еще некоторые другие операции.

При аналитическом способе задания функции закон отображения записывается в виде формулы, которая показывает, какие операции и в какой последовательности надо произвести над числовым значением аргумента или над системами числовых значений аргументов, чтобы получить соответствующее числовое значение функции. Приведем примеры функций, заданных аналитическим способом.

1. $y=f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-x^2}$, x– действительный аргумент.

В задании функции участвуют операции умножения, деления, извлечения квадратного корня (арифметического).

2. $W=F(z)=\frac{z+1}{z^2+1}$, z – комплексный аргумент.

3. $u=\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}-\frac{z^2}{x}$, $x,y,$ – действительные аргументы.

Под областью определения функций (или областью допустимых значений аргумента или аргументов) сокращенно ОДЗ А) будем понимать множество всех тех чисел или систем чисел, для каждого из которых выполним весь комплекс операций,

участвующих в задании функции.

Для функции примера 1:

ОДЗ А=Е= $\{ x / \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} - x^2 \neq 0 \} = (0,1) \cup (1, \infty)$.

Для примера 2:

ОДЗ А=Е= $\{ z / \; z^2 + 1 \neq 0 \}$

Корни уравнения будут комплексными числами и, следовательно, $E = C - \{-i, i\}$

Для функции примера 3 область допустимых значений аргументов определяется неравенствами:

$$E: \left\{ \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{array} \right\}$$

или

$$E = \{ (x, y, z) / x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R \}$$

При рассмотрении остальных способов задания функции ограничимся рассмотрением действительных функций действительного аргумента.

§ 4. Табличный способ задания функции.

Табличный способ задания состоит в том, что отображение задается с помощью таблицы, в которой для ряда значений аргумента или системы значений аргументов, обычно расположенных в порядке возрастания, указаны соответствующие значения функции. Такой способ задания функции одного аргумента вглядит так:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	.....	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	.....	y_n

Табличный способ задания функции двух переменных $z = f(x,y)$ имеет вид:

x \ y	y_1	y_2	. . . . .	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}	. . . . .	z_{1m}
x_2	z_{21}	z_{22}	. . . . .	z_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	z_{n1}	z_{n2}	. . . . .	z_{nm}

где $z_{ij} = f(x_i, y_j)$.

Таким способом часто задаются функции, с которыми приходится иметь дело в инженерной практике, в различных экспериментах и т.д. Многие из таких функций нельзя точно задать аналитическим способом.

§ 5. Графический способ задания функции.

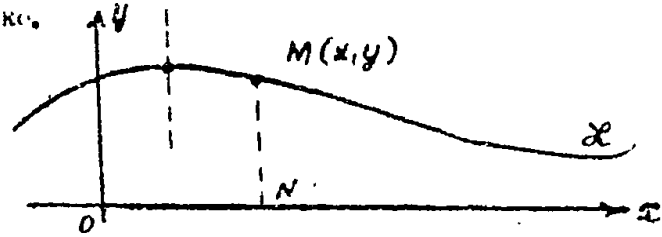
Графический способ задания функции состоит в том, что отображение задаётся в виде кривой или в виде поверхности, т.е. отображение рассматривается в виде геометрического образа.

Определение 1. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех тех и только тех точек координатной плоскости XOY, абсциссы которых равны значениям аргумента из области определения, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Графики функций, изученных в средней школе, представляют собой некоторые линии. Такая линия весьма наглядно показывает особенности изменения функции в связи с изменением аргумента.

Определение 2. Графиком функции $z = f(x,y)$ двух независимых переменных называется множество всех тех и только тех точек координатного пространства $XOYz$, для которых абсциссы и ординаты равны соответственно значениям аргументов X и Y из области определения функции, а третьи координаты (аппликаты) – соответствующим значениям функции. (Смотри геометрическое иллюстрирование отображения множеств).

Проведем в координатной плоскости XOY некоторую линию ($\mathcal{L}$), обладающую следующим свойством: всякая прямая, параллельная оси OY пересекает линию ($\mathcal{L}$) не более, чем в одной точке.



Множество E абсцисс всех точек этой линии можно отобразить в множество ординат M по следующему закону f: каждой абсциссе $X=ON$ поставим в соответствие ординату $Y=NM$ той точки линии, абсцисса которой равна X.

В силу высказанного свойства линии ($\mathcal{L}$) можно утверждать, что отображение $f: E \to M$ будет однозначным отображением, оно представляет собой некоторую однозначную функ-

линию $y = \varphi(x)$. Про эту функцию скажем, что она задана графическим способом.

Вывод: всякая линия ($\mathcal{L}$) в координатной плоскости XOY, пересекающаяся с прямыми, параллельными оси OY не более, чем в одной точке, задает графическим способом некоторую функцию вида $y = \varphi(x)$, где X – абсцисса точки на линии, а Y – ее ордината.

Замечание. Линия ($\mathcal{L}$) в плоскости XOY, пересекающаяся с прямыми, параллельными оси OY более, чем в одной точке, задает графическим способом многозначную функцию или несколько однозначных.

Многие самопишущие приборы, регистрируя ход техн. или иных процессов, вычерчивают на координатной сетке некоторые линии. Эти линии задают нам графическим способом функции, для которых чаще всего нельзя получить аналитические выражения.

§ 6. Описательный способ задания функции.

При таком способе закон отображения E в M выражается *словесно*.

Например:

1. $E = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Закон отображения φ: поставим в соответствие каждому числу $x \in \mathbb{R}$ ближайшее к x целое число, не большее, чем x. Это число y удовлетворяет условиям:

$$y \in \mathbb{Z} \wedge x - 1 < y \leq x$$

Очевидно, для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное такое число y: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{Z}!} (x - 1 < y \leq x)$.

Такое отображение $f : \mathcal{R} \to \bar{\mathcal{Z}}$, являющееся однозначной функцией, записывается следующим образом:

$y = f(x) = [x]$, где $E = (-\infty, \infty)$, $M = \mathcal{Z}$

и называется так: "У есть АНТЬЕ от Х" или "У есть целая часть числа Х".

Приведем некоторые значения этой функции и ее график.

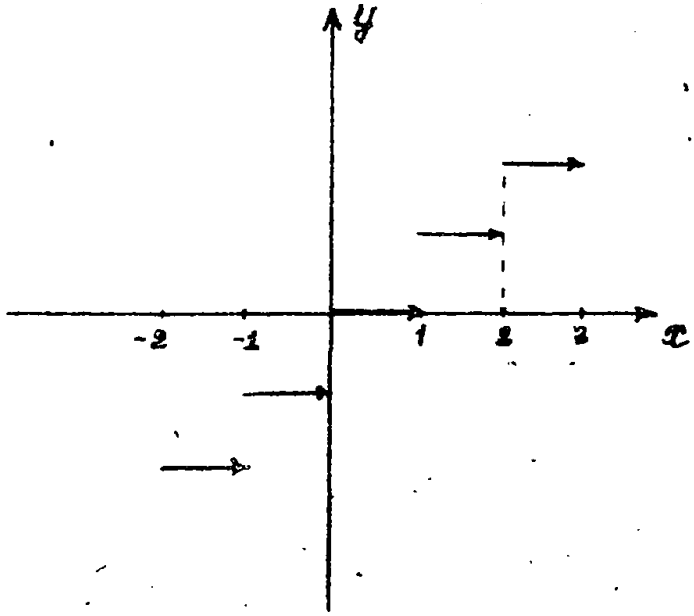
$f(0) = [0] = 0$

$f(-1) = [-1] = -1$,

$f(2) = [2] = 2$, вообще, если с–любое целое число, то

$f(C) = [C] = C$.

$f(\mathcal{R}) = 3$, $f(-36) = -4$ и т.д.



2. Функция Дирихле.

$E = (-\infty, \infty)$, $M = \{0,1\}$.

Закон отображения E в M обозначим греческой буквой χ (ХИ). Выразим его словами: любому рациональному числу поставим в соответствие число 1 и любому иррациональному числу=0. Это отображение является однозначной функцией, которую запишем так: $y = \chi(x)$; $\begin{cases} E = R \\ M = [0,1] \end{cases}$. Можно задавать функции, комбинируя аналитический способ с описательным. Такова, например, функция, обозначаемая символом $[x]$ и называемая " дробной частью числа X": $y = [x] = x - [x]$

Таковы же и функции: $y = \frac{x}{[x]}$, $y = [x] \cdot \chi(x)$ и др.

Упражнение: доказать, что $[x+1] = [x]$ и построить граф к функции $y = [x]$. В качестве краткого повторения зададим описательным способом изучаемые в школьном курсе круговые функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

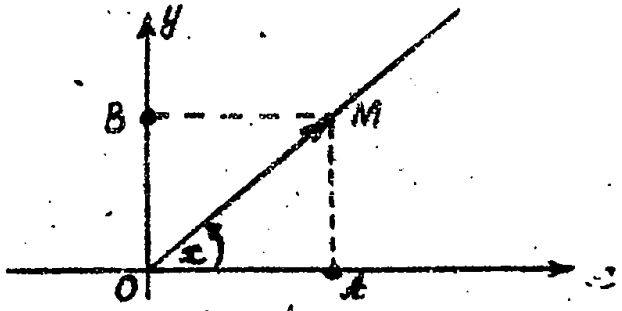


рис. 1

Будем находить из множества R всех действительных чисел. Предлагаются такие законы отображения f_1, f_2, f_3, f_4: для любого действительного числа x осуществим поворот подвижного луча OM с началом в точке

O (см. рис. 1) вокруг этого начала от начального положения оси OX на угол, радианная мера которого равно X (против или по часовой стрелке в зависимости от того, будет ли $X > 0$ или $X < 0$). На этом подвижном луче возьмем произвольную точку M и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM}$, т.е. радиус-вектор точки M относительно центра вращения (начала координат). Определим координаты этого вектора (проекции его на оси координат): абсциссу OA и ординату OB. Составим отношения этих координат к модулю (длине) радиуса-вектора и друг к другу:

$$\frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|} \quad \frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|} \quad \frac{OB}{OA} \quad \frac{OA}{OB}$$

Для любого числа действительного X эти отношения (если только они имеют смысл) определяются однозначно (покажите, что они не зависят от того, где на луче выбрана точка M).

Закон $f_1 : X \to \frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|}$;

$f_2 : X \to \frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|}$

$f_3 : X \to \frac{OB}{OA}$

$f_4 : X \to \frac{OA}{OB}$

Полученные однозначные функции обозначаются так:

$y=f_1(x)=\sin x$, $y=f_2(x)=\cos x$, $y=f_3(x)=\operatorname{tg} x$, $y=f_4(x)=\operatorname{ctg} x$

и читаются соответственно: "y есть синус (косинус, тангенс, котангенс) X".

§ 7. Классификация функций по области определения.

Определение 1. Числовое множество M называется дискретным, если любой его элемент имеет окрестность, не содержащую ни одного элемента множества M.

Дискретными будут, например, множество всех целых чисел и все его подмножества, как конечные, так и бесконечные.

Множество Q всех рациональных чисел не будет дискретным, потому что в любой окрестности любого рационального числа будет содержаться бесконечное множество различных рациональных чисел.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется функцией дискретного аргумента, если ее область определения E представляет собой дискретное множество.

Рассмотрим важный класс таких функций.

Определение 3. Функция, областью определения которой является множество всех натуральных чисел называется числовой последовательностью (или просто последовательностью).

Обозначим буквой n предметную переменную на множест-

во всех натуральных чисел $N = \{1,2,3,4, \ldots\}$.

Тогда последовательности можно обозначать символом $f(n)$. Числа: $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, $u_3 = f(3)$, ..., $u_n = f(n)$ называются членами последовательности. u_1 – первый член, u_2 – второй член и т.д. При этом число u_n с неопределенным порядковым номером n называется ее общим членом.

Последовательность $f(n)$ часто обозначают символом $\{u_n\}$. Задать последовательность – это значит записать ее общий член u_n, как функцию номера n.

Примеры. 1. $u_n = 1 - (-1)^n \frac{1}{2^n}$

$n=1,\ u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$n=2,\ u_2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

$n=3,\ u_3 = 1 + \frac{1}{2^3} = \frac{9}{8}$

. . . . . .

2. $u_n = n!$

$n=1,\ u_1 = 1! = 1$

$n=2,\ u_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$

$n=3,\ u_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$n=4,\ u_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$n=5,\ u_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

. . . . . .

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n-1) \cdot n$.

Наглядное представление о последовательности можно получить, изображая ее члены точками числовой оси или построив обычным образом график функции $u_n = f(n)$ в системе прямоугольных координат.

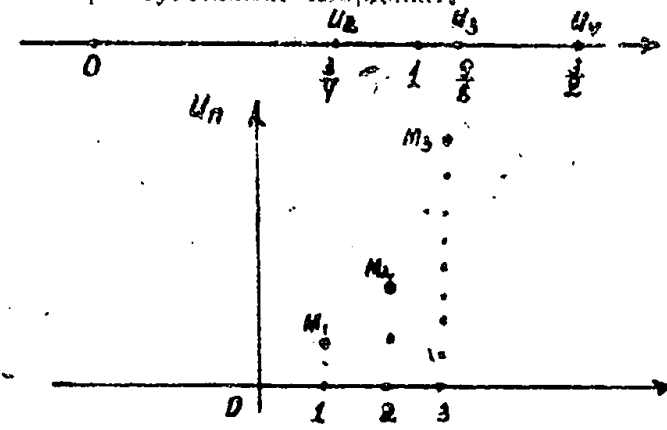


График последовательности будет представлять собой счетное множество точек координатной плоскости, дискретно размещенных в ней.

Определение 4. Числовое множество M называется непрерывным, если оно представляет собой числовой промежуток $\langle \alpha, \beta \rangle$ (интервал, сегмент, полуинтервал, полусегмент) или объединение некоторого множества промежутков, попарно не имеющих общих точек.

Промежутки с одним бесконечным концом, а также интервал с двумя бесконечными концами $R = (-\infty, +\infty)$, т.е. все множество действительных чисел, также будем считать непрерывным множеством.

Примеры непрерывных множеств:

1. $M_1 = (-4, 3] \cup [5, +10) \cup (20, +\infty)$.
2. $M_2 = (0, 1) \cup (1, \frac{1}{2}) \cup (2, \frac{3}{3}) \cup (3; \frac{4}{4}) \cup \dots \cup (n-1; n-1+\frac{1}{n}) \cup \dots$

Определение 5. Функция $y = \varphi(x)$ называется функцией непрерывного аргумента, если ее область определения E – непрерывное множество.

Примеры функций непрерывного аргумента:

1. $y = x^2$, $E = (-\infty, \infty)$
2. $y = \sin x$, $E = (-\infty, \infty)$
3. $y = \operatorname{tg} x$, $E = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi) \cup (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi) \cup (-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi) \cup \dots = \bigcup_{k \in z} ((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2})$

(объединяются все интервалы вида $(2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2})$, где k – любое целое число).

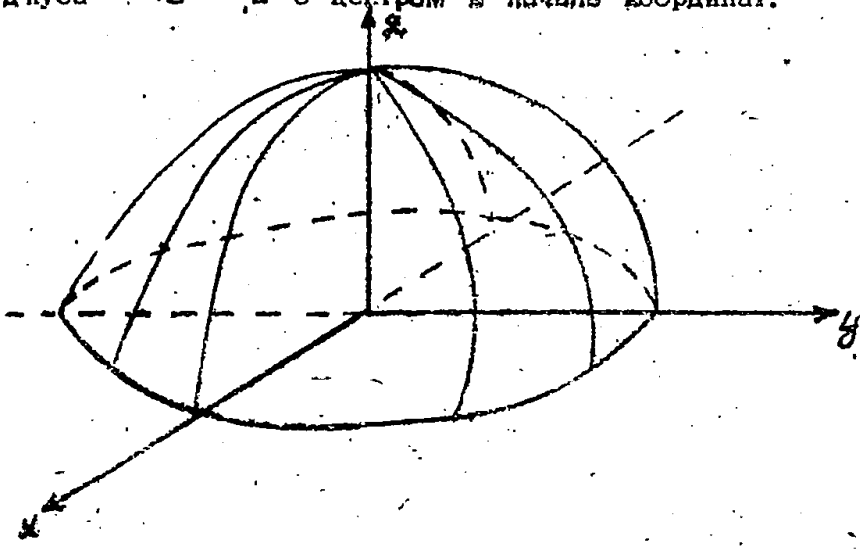
Можно говорить о функциях двух, трех и большего числа непрерывных аргументов.

Графики таких функций одного и двух непрерывных аргументов не будут представлять собой множества

точек, дискретно расположенных в плоскости или в пространстве. Очень многие функции непрерывных аргументов , с которыми приходится иметь дело в инженерных задачах, имеют графики, представляющего собой сплошные линии или поверхности, часто непрерывные (смысл этого свойства выяснится позднее).

Примеры непрерывных функций. 1. График функции $y = ax^2 + bx + c$ – парабола с осью симметрии, параллельной оси ОУ и с вершиной в точке $M\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

2. График функции $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ – верхняя полусфера радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.



§ 2. Обзор класса функций, заданных аналитическим способом.

1. Рассмотрим некоторые функции и назовем их простей-

шими элементарными.

I. а) Задаем множество $E = R = (-\infty, \infty)$, действительное число C и закон отображения E в R:

$$f: \forall_{x \in R}(x \to c)$$

Это однозначное отображение назовем функцией – константой и запишем так: $y = f(x) = c$

Область определения функции – все множество действительных чисел, область изменения $M = \{ c \}$ – одноэлементное множество. Каков график этой функции?

Таких функций – констант – несчетное множество.

II. б). Исходим из того же множества $E = R$ и задаем закон отображения множества $E = R$ в R:

$$\varphi: \forall_{x \in R}(x \to x)$$

Это однозначное отображение назовем функцией–аргументом и обозначим так: $y = \varphi(x) = x$.

Для нее $E = M = (-\infty, \infty)$.

Каков график этой функции?

2. К функциям I–II будем применять алгебраические операции сложения, вычитания, умножения (" + ", " – ", " × ") с одним условием: этих операций должно быть конечное число. При этом, будут получаться новые отображения – функции, из которых отметим здесь:

$$f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3, \ldots, \quad f_n(x) = x^n$$

так называемые степенные функции с натуральным показателем.

Из конечных наборов функций – констант a_0, a_1,

$a_2, \ldots, a_n$, функции аргумента и степенных функций $x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ можно путем применения допущенных операций получить функции вида

$$y = f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

которые называются целыми рациональными функциями (ЦРФ).

Натуральное число n называется степенью ЦРФ. Из таких функций в школе изучаются:

$n = 1$, $y = a_0 x + a_1$ – линейная функция

$n = 2$, $y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ – квадратная функция.

Очевидно, что функцией самого общего вида, которую можно получить из функций $\overline{1}-\overline{11}$ путем выполнения над ними конечного числа операций "+", " – ", " x " будет как раз ЦРФ.

Все функции, рассмотренные в настоящем п. 2 имеют областью определения множество $E = R = (-\infty, \infty)$.

3). Присоединим к операциям " + ", " – ", " x " еще операцию деления.

Таким путем могут быть получены функции:

$$y = \varphi_1(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y = \varphi_2(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \quad y = \varphi_3(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3},$$

$\ldots\ldots$, $y = \varphi_n(x) = x^{-n}$

степенные функции с целым отрицательным показателем.

Функциями самого общего вида, которые можно получить из функций $\overline{1} - \overline{11}$ путем применения к ним конечного числа операций " + ", " – ", " x ", " : " будут

так называемые дробно-рациональные функции (ДРФ) или частные двух ЦРФ:

$$y = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = R_{m,n}(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

Очевидно, областью определения ДРФ будет множество всех действительных чисел, из которого удалены корни ЦРФ $P_n(x)$, т.е. числовые значения аргумента, при которых она обращается в нуль.

Пример: $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x^4-16}$

$$E = (-\infty, \infty) \setminus \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

Из дробно-рациональных функций часто встречается функция $R_{1,1}(x) = \dfrac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1}$, где $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Эта функция называется дробно-линейной. В частном случае, когда $a_0 = a_1 = 0$ из дробно-линейной функции получается функция вида: $y = \dfrac{c}{x}$, описывающая обратную пропорциональную зависимость между переменными величинами x и y.

Функции вида: $P_n(x)$ и $R_{m,n}(x)$ называется рациональными (РФ).

г) Напомним из алгебры некоторые сведения, относящиеся к операции извлечения корня.

Пусть n – натуральное число не меньшее, чем 2.

По определению корнем n-ой степени из действительного числа α называется действительное число β такое, что $\beta^n = \alpha$.

Из курса элементарной математики известны следующие факты:

1. Существует корень n-ой степени с любым натуральным нечетным показателем n из любого действительного числа α.

Этот корень единственный: т.е.

$$\forall_{n \in N} \forall_{\alpha \in R} \exists! \beta \in R \; (\beta^n = \alpha)$$

Обозначение для β: при $\beta = 2k+1$, где k- целое число.

2) Не существует корня n-ой степени с любым четным натуральным показателем n из любого отрицательного действительного числа.

3). Существует два корня n-ой степени с любым натуральным четным показателем n из любого положительного действительного числа $\alpha > 0$. Эти корни представляют собой противоположные числа. Положительный корень называют арифметическим и для него вводится обозначение:

при $n = 2k$, где k - целое число и $k \neq 1$, арифметический корень обозначают символом: $\sqrt[2k]{\alpha}$

Из такого соглашения следует, что из записей:

$\sqrt[4]{16} = \pm 2$, $\sqrt[4]{16} = -2$, $\sqrt[4]{16} = +2$.

Только третья – правильна.

Для $x = 0$ при любом натуральном $n > 1$ полагаем: $\sqrt[n]{0} = 0$.

Задав теперь натуральное число $n > 1$, рассмотрим отображение $f : x \in R \to \sqrt[n]{x}$. Эту функцию обозначим:

III) $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ – простейшая элементарная иррациональная функция. Для нее с учетом сказанного выше об операции извлечения корня имеем:

а) при $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$E = R(-\infty, \infty)$, $M = E = (-\infty, \infty)$

б) при $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$E = [0, \infty)$, $M = [0, \infty)$

Отправляясь от этой функции, применяя к ней операции умножения и деления можно построить степенные функции вида $y = x^z$, где z – любое дробное рациональное число.

2. Так $y = x^{\frac{3}{5}} = (x^{\frac{1}{5}})^3 = \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x}$

$y = x^{-\frac{1}{4}} = (x^{\frac{1}{4}})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3} = \frac{1}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}$

Следовательно, можем считать степенную функцию $y = x^z$ определенной для любого рационального показателя.

Определение: Функции, полученные из 1–2–3 применением к ним операций " + ", " – ", " x ", " : " $\sqrt{\ }$, причем последняя операция должна выполняться над "x" хотя – бы один раз, назы-

ваются иррациональными.

Пример: Функция $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \frac{x}{\sqrt{x}} + 3}$ — иррациональная.

Функции рациональные и иррациональные называются явными алгебраическими функциями.

§ 9. ОПЕРАЦИЯ ОБРАЩЕНИЯ ФУНКЦИЙ

1. Пусть отображение $f: E \to M$ задает нам функцию $y = f(x)\begin{cases} E \\ M \end{cases}$. С областью определения E и множеством значений (областью изменения) M. Если M — область изменения функции $y = f(x)$, то всякий элемент множества M оказывается поставленным в соответствие некоторому (хотя бы одному) элементу множества E.

Осуществим теперь отображение множества M в множество E по следующему закону:

Всякому элементу $y \in M$ поставим в соответствие тот элемент $x \in E$, которому при отображении $f: E \to M$ поставим в соответствие элемент $y \in M$.

Этот закон отображения обозначим символом f^{-1}. Отображение $f^{-1}: M \to E$ задает некоторую функцию $x = f^{-1}(y)$ с областью определения M и областью изменения E.

Отображение $f^{-1}: M \to E$ называется обратным по отношению к отображению $f: E \to M$ и функция $x = f^{-1}(y)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Переход от функции $y = f(x)$ к обратной $x = f^{-1}(y)$

называется обращением функции $y = f(x)$.

При обращении функции область определения и область изменения меняются местами.

2. Напомним, что если отображение $f: E \to M$ однозначно, то и заданная этим отображением функция $y = f(x)$ с областью определения E и областью изменения M так же называется однозначной.

Пусть функция $y = f(x)\begin{cases} E \\ M \end{cases}$ однозначна. Может оказаться, что и обратная же функция $x = f^{-1}(y)\begin{cases} M \\ E \end{cases}$ также будет однозначной.

Это будет иметь место, например, когда всяким двум различным элементам x_1 и x_2 из области определения E функции $y = f(x)$ будут соответствовать два различных же элемента y_1 и y_2 из области M:

$$\forall x_1 \in E \; \forall x_2 \in E \; (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \qquad (*)$$

В самом деле, пусть условие $(*)$ выполняется. Предположим, что обратное отображение $f^{-1}: M \to E$ неоднозначно. Это значит, что в множестве M найдется такой элемент y^*, которому в этом отображении окажутся поставленными в соответствие по крайней мере два различных элемента x_1^* и x_2^* из множества E. Но тогда по определению закона f^{-1} и отображения $f^{-1}: M \to E$ в отображение $f: E \to M$ двум различным элементам x_1^* и x_2^* множества E окажется поставленным в соответствие один и тот же элемент y^* M, т.е. $f(x_1^*) = f(x_2^*) = y^*$, что противоречит условию $(*)$.

Пример: Функция $y = f(x)$ задана аналитическим выражением:

$$y = 2x - 3 \quad \begin{cases} E = (-\infty, \infty) \\ M = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Она однозначна и выполняется условие ($\star$) настоящего пункта,

К обратной функции можно перейти, разрешив аналитическое выражение функциональной зависимости y от x относительно x:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2} \text{ и } \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \begin{cases} M = (-\infty, \infty) \\ E = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Полученная обратная функция так же однозначна.

Если отображения $f: E \to M$ и $f^{-1}: M \to E$ одновременно однозначны, то говорят, что закон f и f^{-1} устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств E и M.

Про множества E и M, между элементами которых может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, говорят, что они эквивалентны.

При однозначности отображения $f: E \to M$ (а значит и функции $y = f(x) \begin{cases} E \\ M \end{cases}$) обратное отображение $f^{-1}: M \to E$ (а значит и обратная функция $x = f^{-1}(y)$) может оказаться не однозначным (не однозначной).

Пример: функция $y = f(x)$, задана аналитическим выражением $y = x^2$, отображает множество $R = (-\infty, \infty)$ в полученное $M = [0, \infty)$. Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ не будет однозначной, ибо в обратном отображении $f^{-1}: M \to R$ всякому положительному числу y окажется поставленным в соответствие два числа: арифметический квадратный корень из $\alpha (\sqrt{\alpha})$ и число $(-\sqrt{\alpha})$. Значит, обратная функция будет двузначной. Эту двузначность можно устранить следующим обра-

зом: можно рассмотреть два обратных отображения

$$f_1^{-1}: \forall \alpha \geq 0 \ (\alpha \to \sqrt{\alpha})$$

$$f_2^{-1}: \forall \alpha \geq 0 \ (\alpha \to -\sqrt{\alpha})$$

каждое из которых будет уже однозначным и в соответствии с этим можно сказать, что для функции $y = x^2 \begin{cases} (-\infty, \infty) \\ [0, \infty) \end{cases}$ может быть путем обращения построены две уже однозначные обратные функции: $x = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y} \begin{cases} M = [0, \infty) \\ E = [0, \infty) \end{cases}$

$$x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} \begin{cases} M = [0, \infty) \\ E = (-\infty, 0] \end{cases}$$

§ 10. ОБРАЩЕНИЕ КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Рассмотрим функцию $y = f_1(x) = \sin x \begin{cases} E = R = (-\infty, \infty) \\ M = [-1, 1] \end{cases}$.

Для нее обратная $x = f_1^{-1}(y) \begin{cases} M = [-1, 1] \\ E = R(-\infty, \infty) \end{cases}$ будет бесконечнозначной, ибо для каждого действительного числа α, принадлежащего сегменту $[-1, +1]$ можно указать бесчисленное множество действительных чисел, являющихся радианными мерами углов, синус которых равен α.

Например: $f_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ или

или $f_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

Все эти значения можно записать одной формулой

$$f_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi \quad (m \in Z)$$

При обращении получилась бесконечнозначная функция, ко-

торая обозначается так: $X = Arc\sin y \begin{cases} M = [-1, 1] \\ E = (-\infty, \infty) \end{cases}$.

Читается: " x есть арксинус с большой буквы y".

Аналогично путем обращения круговых функций $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ могут быть получены бесконечнозначные функции:

$x = Arccos\, y$

$x = Arctg\, y$

$x = Arcctg\, y$

Все эти функции могут быть названы бесконечнозначными обратными круговыми функциями.

2. Каким образом, путем обращения, получить обратные однозначные круговые функции?

При обращении функции $y = f(x) = \sin x$ бесконечнозначная функция $x = Arc\sin y$ получилась потому, что по закону f в множество $[-1, +1]$ отображалось слишком широкое множество $R = (-\infty, \infty)$.

Функция $y = \sin x$ принимала каждое свое значение из сегмента $[-1, +1]$ бесчисленное множество раз. Если отобразить в $[-1, +1]$ такую часть E^* множества $R = (-\infty, \infty)$, в точках которой функция $y = \sin x$ принимает всякое значение из сегмента $[-1, +1]$ и при этом каждое только по одному разу, то обратное отображение $[-1, +1]$ в такую часть E^* будет уже однозначным.

Эту часть E^* можно подобрать бесчисленным множеством

способов, из которых мы укажем такой $E^* = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

В этом случае обратное отображение $\varphi^{-1}: [-1, 1] \to E^*$ задает однозначную обратную круговую функцию $x = \varphi^{-1}(y) \begin{cases} M = [-1, 1] \\ E = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ которая обозначается так:

$$x = \arcsin y$$

и читается: " x есть арксинус с малой буквы У". -

Сегмент $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ называется областью главных значений арксинуса. Получены таким образом, две взаимно-обратные однозначные функции

$$y = \sin x \begin{cases} E^* = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ M = [-1, 1] \end{cases} \quad \text{и} \quad x = \arcsin y \begin{cases} M = [-1, 1] \\ E^* = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Аналогично обращение на суженных множествах функции

$$y = \cos x \begin{cases} E^* = [0, \pi] \\ M = [-1, 1] \end{cases}, \quad y = \operatorname{tg} x \begin{cases} E^* = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ M = (-\infty, \infty) \end{cases} \text{ и } y = \operatorname{ctg} x \begin{cases} E^* = (0, \pi) \\ M = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

приводит к однозначным обратным круговым функциям

$$x = \arccos y \begin{cases} M = [-1, 1] \\ E^* = [0, \pi] \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arctg} y \begin{cases} M = (-\infty, \infty) \\ E^* = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcctg} y \begin{cases} M = (-\infty, \infty) \\ E^* = (0, \pi) \end{cases}$$

Исходя из вышеизложенных рассуждений, можно записать следующие условные равенства:

$$\operatorname{Arcsin} y = (-1)^m \arcsin y + m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z})$$
$$\operatorname{Arccos} y = \pm \arccos y + 2m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z})$$
$$\operatorname{Arctg} y = \operatorname{arctg} y + m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z})$$
$$\operatorname{Arcctg} y = \operatorname{arcctg} y + m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z})$$

которые надо толковать так:

Для арксинуса: Любое значение бесконечнозначной функции $\operatorname{Arcsin} y$ может быть получено из значения однозначной функции $\arcsin y$, умножением его на (-1) и прибавлением к этому произведению $m\pi$, где m – некоторое целое число. Для других обратных круговых функций рассуждения аналогичны.

§ 11. ОБРАЩЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.

1. В школьном курсе математики изучалась показательная функция:

$$y = a^x, \quad \text{где } a \neq 1 \text{ и } a > 0.$$

Там же раскрывается смысл ограничений $a \neq 1$ и $a > 0$, – наложенных в определение показательной функции. При этих ограничениях может быть однозначно определена степень основания "a" показательной функции с любым как рациональным, так и иррациональным показателем (пока нам, однако неизвестно, что понимать например под символом $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{\pi}}$ и т.д.).

После этого функция $y = a^x$ становится однозначной, определенной на всей числовой прямой, функцией, все зна-

чения которой положительны:

$$y = \varphi(x) = a^x \begin{cases} E = (-\infty, \infty) \\ M = (0, \infty) \end{cases}$$

Можно доказать, что для любого положительного числа "y" и любого заданного положительного числа "a", отличного от 1, существует и притом единственное действительное число x такое, что

$y = a^x$, т.е.

$$\forall y \in (0, +\infty) \; \forall a \in (0,1) \vee (1, \infty) \; \exists! x \in (-\infty, \infty) (a^x = y).$$

Существование и единственность такого числа "x" позволяет рассмотреть обратное отображение

$$\varphi^{-1} : M = (0, \infty) \to E(-\infty, \infty),$$

которое задает однозначную функцию

$$x = \varphi^{-1}(y) \begin{cases} M = (0, \infty) \\ E = (-\infty, \infty), \end{cases}$$

обратную по отношению к показательной функции $y = a^x$.

Эта функция обозначается так $x = \log_a y$

и читается : "x есть логарифм y при основании a".

2. Заменив в функции $y = a^x$ показатель x на выражение логарифмической функции, получаем так называемое основное логарифмическое тождество.

$y = a^{\log_a y}$ для любого положительного числа y.

§ 12. ОПЕРАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЯ ОТ ФУНКЦИИ. (Суперпозиция функций)

1. Во многих приложениях учения о функциях приходится рассматривать цепочки функциональных зависимостей.

Например: Кинетическая энергия T движущейся частицы есть, очевидно, функция скорости его движения $T = f(v)$, скорость же движения, если оно неравномерное, есть в свою очередь, функция времени $v = \varphi(t)$. Здесь мы имеем дело с двухзвенной цепочкой: в которой аргумент новой функции сам представляет собой функцию некоторого другого аргумента.

Можно рассмотреть и более длинные цепочки функций, связанных между собой так, как в рассмотренном примере.

Например: $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$ (1)

или

$$y = F(u),\ u = f(v),\ v = \varphi(w),\ w = \chi(x) \qquad (2)$$ и т.д.

Аргумент последней функции цепочки будем называть <u>независимым</u>, а аргументы всех остальных функций – <u>промежуточными</u>. Эти промежуточные аргументы уже нельзя рассматривать, как независимые переменные, ибо каждый из них представляет собой функцию аргумента последующего звена цепочки.

Рассмотрим, например, цепочку (2). В ней с изменением основного аргумента X и в зависимости от него изменяется последний промежуточный аргумент w, а с изменением w и в зависимости от него изменяется предпоследний промежуточный аргумент v и т.д. u,

никнет, с изменением первого промежуточного аргумента и в зависимости от него изменяется сама зависимая переменная или функция y.

Значит, зависимая переменная первой функции цепочки может рассматриваться как функция последнего независимого аргумента, но зависящая от него не непосредственно, а через посредство всех промежуточных аргументов. В этом смысле будем говорить, что переменная y будет сложной функцией независимого аргумента x или функцией от функции. Эти сложные функции будем обозначать символически с помощью характеристик функций цепочки следующим образом:

цепочка (1): $y = f(\varphi(\psi(x)))$ (1^*)

цепочка (2): $y = F(f(\varphi(\psi(x))))$ (2^*) и т.д.

Содержательный смысл таких символов будем представлять себе следующим образом.

Сложная функция (1^*): для того, чтобы для данного значения основного аргумента x получить соответствующее значение функции y необходимо;

а) над значением x выполнить весь комплекс операций, участвующих в задании функции $v = \psi(x)$, получится некоторое значение v последнего промежуточного аргумента;

б). над этим значением v выполнить весь комплекс операций, участвующих в задании функции $u = \varphi(v)$, получится некоторое значение u первого промежуточного аргумента;

в). над этим значением z выполнить весь комплекс операций, участвующих в задании функции $y = \varphi(z)$.

В конечном результате получится искомое значение сложной функции (1^*).

Аналогично раскрывается содержательный смысл символа сло сложной функции (2^*).

2. Переход от заданных функций цепочки к сложной функции независимого аргумента будем представлять себе как новую математическую операцию, которую будем называть суперпозицией этих функций. Этим термином будем называть и сами получающиеся сложные функции.

Таким образом, запись (2^*) можно прочитать следующим образом:

"У есть суперпозиция функций $F(u), \varphi(v), \psi(w), \psi(x)$."

Так как в символах функций несущественно, какими буквами обозначены зависимые переменные и аргументы, можно все промежуточные аргументы и независимую переменную обозначить одной буквой, например буквой x. Тогда можно сказать для (2^*), что "У есть суперпозиция функций $F(x), \varphi(x), \psi(x), \psi(x)$ ".

Для образования суперпозиций вида $y = F(\varphi(x))$ следует, как показывает сам символ, в функцию $F(x)$ вместо аргумента x подставить функцию $\varphi(x)$. Такой же подстановкой функций вместо аргументов можно получить суперпозиции любого числа функций.

Примеры:

1. Записать суперпозицию функций:

а) $\varphi(x) = \cos(x)$ и $\psi(x) = \lg(x)$

Очевидно, $y = f[\varphi(x)] = \cos \lg x$

б) $\varphi(x) = \lg x$ и $f(x) = \cos x$

Очевидно, $y = \varphi(f(x)) = \lg \cos x$.

Отсюда, кстати, замечаем, что результат суперпозиции двух функций зависит от того, в каком порядке берутся функции, подлежащие суперпозиции.

в) Можно осуществить суперпозицию некоторой функции и ее же самой.

Так в нашем примере $y = f(f(x)) = \cos\cos x$

$y = \varphi(\varphi(x)) = \lg\lg x$

2. Записать функцию $y = \cos\sqrt{2^{1+x^2}}$ в виде цепочки функций.

Очевидно,

$$\begin{cases} y = \cos u \\ u = \sqrt{v} \\ v = 2^w \\ w = 1 + x^2 \end{cases}$$

3. Можно получать суперпозиции функций не одной, а нескольких аргументов. Так, если $z = f(u,v)$, $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, то суперпозицией функций $f(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ будет, например, сложная функция независимых аргументов x и y.

$$z = f(\varphi(x,y);\ \psi(x,y))$$

Пример: $z = 2^{u+v}$, $u = x^2$, $v = \frac{1}{\sqrt{y}}$

Результат суперпозиции функций будет иметь вид:

$$z = 2^{x^2 + \frac{1}{\sqrt{y}}}$$

§ 13. ПОНЯТИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФУНКЦИИ.

1. Это понятие будет относиться к числовым функциям числовых аргументов. При конструировании элементарной функции будем исходить из простейших элементарных функций:

1. $y = C$ (Функция константа)
2. $y = x$ (Функция аргумент)
3. $y = \sqrt[n]{x}$ (простейшая иррациональная функция)
4. $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ (круговые функции)
5. $y = a^x$, а 0 и $a \neq 1$ (показательная функция)

Произведя однозначные обращения функций 4 и 5 придем к функциям:

6. $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$
7. $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Функция 6 и 7 тоже будем считать простейшими элементарными. Над функциями 1 – 5 будем производить операции сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, потребовав при этом, чтобы всякий раз производилось только конечное число таких операций, причем, это число может быть сколь угодно большим. Идя по этому пути, мы будем всякий раз получать новые функции.

Объединив их мысленно, мы получим множество или класс так называемых элементарных функций.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется элементарной, если она может быть получена из простейших функций 1–7 применением к ним конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции.

Применяя эти операции к функциям 1–2–3, мы будем полу-

чать, как уже ранее было сказано, алгебраические функции. Если же среди функций, участвующих в задании элементарной функции $y = \varphi(x)$ участвует хотя бы одна из функций 4–5–6–7, то такая элементарная функция называется трансцедентной. При этом, сами функции 4–7 называются простейшими трансцедентными.

Пример. Рассматривается функция

$$y = \varphi(x) = \operatorname{arctg} \frac{2^{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x^2}}{\cos^2(x^3)}$$

В задании этой функции участвуют 6 простейших элементарных функций: 1, x, $\sqrt[3]{x}$, $\cos u$, 2^w

Из этих функций:

а) применением операции деления получается функция $\frac{1}{x}$,

б) применением операции умножения получается функция $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$,

в) путем суперпозиции функций 2^w и $\frac{1}{x}$ получена функция $2^{\frac{1}{x}}$,

г) путем сложения получена функция $2^{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x^2}$,

д) два умножения дали функцию x^3 ($x^3 = x \cdot x \cdot x$)

е) суперпозиция функций $\cos u$ и $w = x^3$ дала функцию $\cos x^3$,

ж) умножением $\cos v \cdot \cos v$ получена функция $\cos^2(x^3)$,

з) делением получена функция $\frac{2^{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x^2}}{\cos^2(x^3)}$

и) и, наконец, суперпозиция функций $\operatorname{arctg} v$ и $v = \frac{2^{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x^2}}{\cos^2(x^3)}$ привела к рассматриваемой функции $y = \varphi(x)$.

Она получена из шести простейших элементарных функций вида 1 – 7, путем выполнения над ними 10 операций: одного сложения, четырех умножений, двух делений и трех суперпозиций. Значит, рассматриваемая функция – элементарная. В ее задании участвуют три простейших трансцедентных x, следовательно, перед нами трансцедентная элементарная функция.

2. В функции нескольких аргументов можно несколько из них или даже все заменить какими – нибудь другими. Каждая такая операция может быть рассматриваема как суперпозиция. Например: замена в функции $f(x, y, z)$ аргумента "y" каким-нибудь другим аргументом v может быть рассматриваема как суперпозиция функции $f(x, y, z)$ и функции-аргумента $y = \varphi(v) = v$, $f(x, v, z) = f(x, \varphi(v), z)$

Рассмотрим теперь некоторые простейшие элементарные функции 1 – 7 аргумента x:

$$c,\ x,\ \sqrt[n]{x},\ \sin x,\ \cos x,\ \dots \arcsin x,\ \arccos x,\ a^x,\ \log_a x \quad (1)$$

и функцию-аргумент y. Подставив в функции 1 – 7 аргумент y вместо x, мы получим простейшие элементарные функции аргумента y: $y,\ \sqrt[n]{y},\ \sin y,\ \cos y,\ \dots \arcsin y,\ \arccos y,\ \dots a^y,\ \log_a y$ (2)

Рассматривая теперь различные функции, которые могут быть получены из функций (1) и (2) применением к ним конечного числа алгебраических операций (+, –, ., :) и суперпозиций, мы придем к представлению о классе всех элементарных функций двух аргументов.

3. Про всякую элементарную функцию будем говорить, что она задана аналитическим способом. Про элементарные функции иногда говорят, что они заданы формулой.

В приложениях математики к инженерным дисциплинам часто приходится иметь дело с функциями, которые на различных участках области определения, не имеющих общих точек, задаются различными формулами.

Пример:

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0 \\ -x, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Область определения ее $E = (-\infty, \infty)$ состоит из двух множеств: $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$ на каждом из которых функция задана своей формулой.

Такой способ задания функции будем называть кусочно-аналитическим. Про функции, заданные таким способом нельзя сказать, что они элементарные. Могут сказать, что приведенную в в примере функцию можно задать формулой $y = |x|$ и что она, следовательно, элементарная. Это, однако, наверно, ибо в списке операций, которые от функций 1–7 приводят к элементарным, нет такой, как „нахождение модуля действительного числа".

4. Если над функциями 1–7 мы будем выполнять бесконечное множество алгебраических операций и суперпозиции, то можно придти в отдельных случаях к функциям, которые есть в классе элементарных. Но при этом можно получить и такие, которых нет в этом классе.

5. Для элементарных функций за область определения E принимают множество всех тех и только тех значений аргумента, для которых определены все простейшие элементарные функции и выполнимы все операции, участвующие в задании этих функций. Это множество иногда называют областью допустимых значений аргумента (ОДЗА).

Пример. Найти ОДЗА для функции $y=\sqrt{\log_2(x+4)}$

Множество E определяется соотношением: $\log_2(x+4)\geqslant 0$.

Очевидно, $\log_2(x+4)\geqslant 0 \Leftrightarrow x+4\geqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant -3$.

Значит $E=[-3;+\infty)$.

§ 14. НЕЯВНОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИЙ.

1. Если задание функций формулой имеет вид: $y=\mathcal{L}(x)$, то такая функция называется явной.

Для определения значения такой явной функции в точке $x_0\in E$ достаточно в правую часть формулы подставить вместо аргумента x его значение x_0 и произвести весь комплекс операций, участвующих в задании функции.

2. Пусть теперь имеется некоторое аналитическое выражение $\mathcal{F}(x,y)$, содержащее две переменные величины x и y , и уравнение: $\mathcal{F}(x,y)=0$ (*)

Если каждому значению x из некоторого промежутка $\langle a, b \rangle$ будет соответствовать определенное (значит единственное) значение переменного y, удовлетворяющее уравнению $F(x, y) = 0$, то будем говорить, что это уравнение определяет y, как однозначную неявную функцию x : $y = \varphi(x)$

Про такую функцию $y = \varphi(x)$ говорят, что она задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ (или: задана в неявной форме).

Примеры: 1) Уравнение $2x - 3y + 5 = 0$ задает на промежутке $(-\infty; +\infty)$ "y" как неявную функцию-аргумента "x". От такого неявного задания этой функции легко перейти к явному, разрешив уравнение относительно y: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

2. Если уравнение $2x - \sin y + 4^{xy} + 6 = 0$ и задает "y", как неявную функцию-аргумента x, то от такого задания не удастся перейти к явному потому, что мы не сможем разрешить уравнение относительно x.

3. Уравнение $F(x, y) = 0$ может задавать на некотором промежутке не одну, а несколько однозначных неявных функций.

Пример: уравнение $x^2 + y^2 - 4 = 0$ определяет на сегменте $[-2, 2]$ две однозначных функции, которые легко записать в явной форме:

$$y = f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y = f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

4. В ряде случаев целесообразно при наличии уравнения

$$F(x,y)=0$$

рассматривать не У, как неявную функцию – аргумента х, а х, как неявную функцию–аргумента у: $x=\varphi(y)$

5. Можно рассматривать неявные функции нескольких независимых переменных.

Так, уравнение вида $F(x,y,z)=0$ может задавать на некотором множестве точек плоскости ХОУ переменную z, как однозначную функцию аргументов х, у (или несколько таких функций).

Пример: Уравнение $x^2+3yz-2y-4z+5=0$ задает z, как неявную функцию аргументов х и у, для которой легко получить и явное выражение: $z=\frac{2y-x^2-5}{3y-4}$

§ 15. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИЙ.

1. Пусть на некотором числовом множестве E_t определены две однозначные функции

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Над одной из этих функций произведем операцию обращения, в результате которой получим функцию $t=\varphi^{-1}(x)$. Затем осуществим суперпозицию функций $y=\psi(t)$ и $t=\varphi^{-1}(x)$. В результате получим сложную функцию $y=\psi(\varphi^{-1}(x))=F(x)$, определенную на некотором множестве E_x. Она может оказаться

однозначной или многозначной в зависимости от того, какое будет обращение функции $x=\varphi^{-1}(t)$: однозначное или многозначное. Во втором случае будем считать, что получено несколько однозначных функций вида $y=F(x)$ (может быть, даже бесконечно много).

Аргумент t функций (*) будем называть параметром.

Вывод: Всякие две функции x и y параметра t вида (*) определяют одну или несколько однозначных функций вида $y=F(x)$, про которые будем говорить, что они заданы параметрическим способом.

Обращая функцию $y=\psi(t)$ и производя суперпозицию функций $x=\varphi(t)$ и $t=\psi^{-1}(y)$, придем к функции $x=\Phi(y)$, про которую тоже скажем, что она задана параметрическим способом.

Вывод: Если переменные x и y заданы, как функции некоторого параметра t, то наличие этих функций позволяет каждую из переменных x и y рассматривать, как функцию другой: $y=F(x)$; $x=\Phi(y)$.

Примеры: 1. Заданы две линейные функции параметра t:

$$\begin{cases} x = a+mt \\ y = b+nt \end{cases}$$

где a, b, m, n – некоторые константы, $m\neq 0$, $E_t=(-\infty,+\infty)$.

Обратим первую функцию:

$$t=\frac{x-a}{m}$$

и осуществим суперпозицию второй функции и полученной

$$y=b+n\cdot\left(\frac{x}{m}-\frac{a}{m}\right)$$

$$y=\left(b-\frac{na}{m}\right)+\frac{n}{m}\cdot x$$

Получили линейную функцию переменного x на $(E_x = -\infty; +\infty)$, которая задана параметрическим способом. Мы сумели перейти, однако, от такого параметрического задания к обычному явному заданию.

2. Заданы две тригонометрические функции параметра t :

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, где a – константа.

Возводя обе правые части в квадрат и складывая, получим уравнение $x^2 + y^2 = a^2$, которое задает неявную функцию y от x (или x от y).

§ 15. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ ПО СВОЙСТВАМ ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА M.

В дальнейшем речь будет идти только об однозначных числовых функциях.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ определенная на множестве E называется $\begin{cases} \text{четной} \\ \text{нечетной} \end{cases}$, если выполняется следующее условие: $\forall_{x \in E} \left(\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \right)$

Из самого определения следует, что функция такая, будучи определена в точке x, будет определена и в точке (– x), т.е. ее область определения симметрична относительно нулевой точки. Значит, среди функций, область определения которых не симметрична относительно нулевой точки, не может быть ни четных,

ни нечетных.

Примеры: 1. Функции: 1) $f_1(x) = x^2$

2) $f_2(x) = \cos x$

3) $f_3(x) = \frac{x^3}{\sin x}$

4) $f_4(x) = a^x + a^{-x}$ – четные.

Покажем, например, что функция $f_3(x) = \frac{x^3}{\sin x}$ – четная.

$$f_3(-x) = \frac{(-x)^3}{\sin(-x)} = \frac{-x^3}{-\sin x} = \frac{x^3}{\sin x} = f(x)$$

2. Функции: 1) $f_1(x) = tg(x)$; 2) $f_2(x) = \frac{x^5}{1+x^2}$;

3) $f_3(x) = \arcsin x$, 4) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ – нечетные.

Покажем, например, что функция $f_2(x)$ – нечетная.

$$f_2(-x) = \frac{(-x)^5}{1+(-x)^2} = \frac{-x^5}{1+x^2} = -\frac{x^5}{1+x^2} = -f(x)$$

3. Функция $f(x) = x^2 + x + 1$ – ни четная, ни нечетная.

В самом деле: $-f(x) = -x^2 - x - 1$;

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1 \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Четные и нечетные функции имеют некоторые особенности графиков:

1) график четной функции симметричен относительно оси ординат. В самом деле, пусть точка $M[x; f(x)]$ – некоторая точка графика функции. Тогда точка $M_1[-x; f(x)]$, симметричная с точкой M относительно оси OУ, также будет принадлежать графику функции, так как координаты точки M_1 в силу

четности функции можно переписать так: $M_1[-x; f(-x)]$
Таким образом, график функции будет состоять из точек координатной плоскости XOУ, попарно симметричных относительно оси OУ.

2) График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Свойство легко доказывается.

Определение.2. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует положительное число τ такое, что для любого x из области определения E

$$f(x+\tau) = f(x)$$

(или в логико-символической форме: $\exists_{\tau>0}\,\forall_{x\in E}(f(x+\tau)=f(x))$

Таких положительных чисел τ может оказаться не одно, а несколько. Тогда, если существует наименьшее из них, то его называют периодом функции и обозначают буквой T.

Если T-период функции, то, как явствует из определения, если функция определена в точке x, то она будет определена и в точках $x \pm T$, $x \pm 2T$, $x \pm 3T$, ... , $x \pm nT$ . . . . . и при этом во всех этих точках значения функции одинаковы:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \cdots\cdots$$

Иногда числа 2T, 3T, ... , nT, . . . т. также называют периодами функций и о числе T говорят, что это наименьший период. Из школьного курса известно, что функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sin kx$, $\cos kx$, $\operatorname{tg} kx$, $\operatorname{ctg} kx$ $(k>0)$ –

– периодические . их периоды соответственно равны: 2π, 2π, π, π, $\frac{2\pi}{k}$, $\frac{2\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$

Периодические функции можно обнаружить и среди функций,

заданных не аналитическим способом.

Покажите, например, что функция $y = x - [x]$ – периодическая и найдите ее период.

Построив график периодической функции на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, длина которого равна периоду T, мы сможем продолжить его по свойству периодичности и на промежутке $\langle \beta, \beta+T \rangle, \langle \beta+T, \beta+2T \rangle$ и т. д.

Покажите, что если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют соизмеримые периоды T_1 и T_2, т.е. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$, где n_1 и n_2 – натуральные числа и $\frac{n_1}{n_2}$ – несократимая дробь, то функция $\begin{vmatrix} A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) \\ T = n_2 T_1 = n_1 T_2 \end{vmatrix}$ – периодическая и ее период

Пусть E^* – некоторое множество, на котором функция $y = f(x)$ определена. Это множество может совпадать с областью определения E или быть ее частью: $E^* \subseteq E$

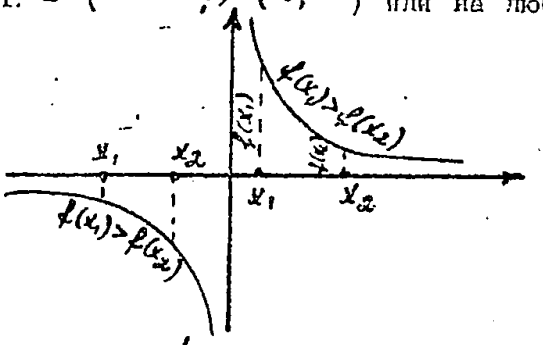
Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется {возрастающей, убывающей} на множестве E^*, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого множества меньшему из них соответствует {меньшее, большее} значение функции.

По определению: для возрастающей функции имеем соотношение $\forall x_1 \in E^* \forall x_2 \in E^* (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$; для убывающей – $\forall x_1 \in E^* \forall x_2 \in E^* (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

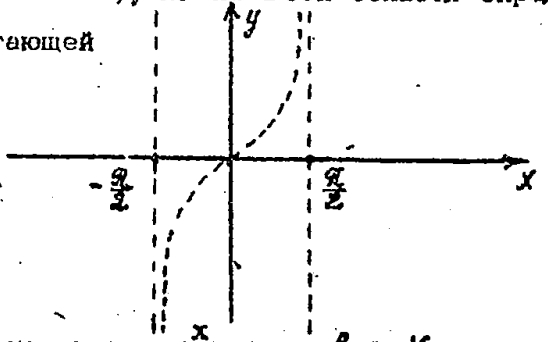
Для возрастающей функции с возрастанием значения аргумента значение функции возрастает и, следовательно, точка графика, перемещаясь слева направо, поднимается вверх.

Для убывающей функции с возрастанием значения аргумента значение функции убывает и, следовательно, точка графика, перемещаясь слева направо, опускается вниз.

Примеры. 1. Функция $y = \frac{1}{x}$ убывает в всей области определения. $E = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ или на любой ее части.



2. Функция $y = tg\, x$ возрастает на множество $E^* = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, но на всей области определения она не будет возрастающей



3. Функция $y = a^x$ и $y = \log_a x$ при $a > 1$ на своих областях определения возрастают.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $E^* \subseteq E$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве E^*, если существует такое положительное число C, что для любого значения аргумента x из E^* значение функции $f(x)$ по модулю меньше C; т.е.

$$\exists c>0\ \forall x\in E^*\ (|f(x)|<c)$$

Определение. Неограниченность функции $y = f(x)$ на множестве E^* можно написать, подвергнув отрицанию условие ограниченности, в виде:

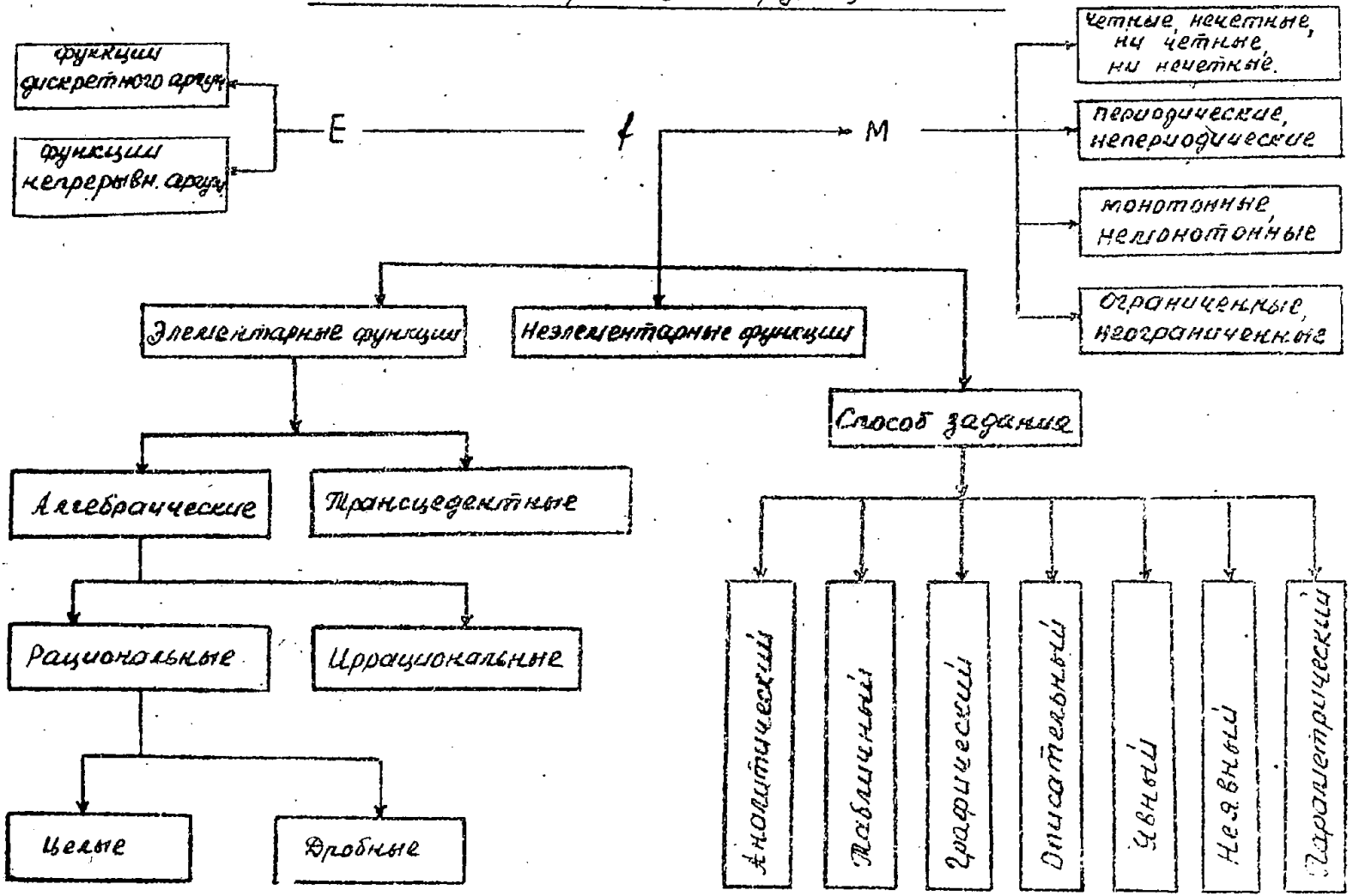
$$\overline{\exists c>0\ \forall x\in E^*(|f(x)|<c)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall c>0\ \exists x\in E^*(\overline{|f(x)|<c}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall c>0\ \exists x\in E^*(|f(x)|>c)$$

Примеры: 1. Функция $y = \sin x$ – ограниченная во всей области определения.

2. функция $y = tg\,x$ – ограниченная на множестве $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, но неограниченная на $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

Ниже приводится схема классификации функций.

Схема классификации функций



ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.

В этой главе будет рассмотрена новая операция – – "вычисления предела переменной величины". Эта операция уже знакома из курса элементарной математики, изучавшегося в средней школе. Этой операцией пользовались при вычислении длины окружности, площади круга, объемов геометрических тел и т.д. Если u некоторая переменная величина, то операцию "предел переменной величины u" будем обозначать так $\lim u$; ($\lim$ – по латыни предел).

В курсе высшей математики эта операция нужна будет в дальнейшем для построения новых операций – дифференцирования, интегрирования, вычисления суммы ряда ., исследования функций и построения их графиков и т.д.

Изучение этой операции будем вести следующим образом:

1) введем понятие " предела переменной величины";

2) рассмотрим способы вычисления "предела переменной величины";

3) изучим области применения операции "вычисление предела переменной величины".

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Пусть переменная "x" изменяется таким образом, что ее значения стараются как угодно близкими к некоторому числу

"x_0", т.е. переменная величина "x" принимает значения близкие к "x_0", но не достигая "x_0". Сформулированное выше предложение кратко записывают следующим образом: величина "x" стремится к "x_0" или "x" $\to$ "x_0"! Дадим определение предела переменной величины.

Определение: Число "x_0" называется пределом переменной величины "x", если существуют такие значения переменной "x", начиная с которых все значения этой переменной удовлетворяют условию $|x - x_0| <$ E, где E – любое наперед заданное сколь угодно малое положительное число.

В дальнейшем для сокращения записей будем сформулированное выше определение записывать в символах следующим образом:

$$(x \to x_0) \Longleftrightarrow (\lim x = x_0)$$

Пример. Пусть x $\to$ 5. Рассмотрим два случая.

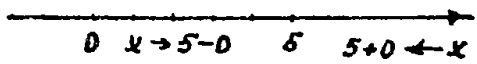
а) Пусть x $\to$ 5, принимая целые значения. Тогда x может стремиться к 5 слева, принимая значения 1,2,3,4 или справа, принимая значения . . .8,7,6. Геометрически это можно изобразить следующим образом:

В приведенном примере можно записать:

$$(x \to 5); \quad (x \to 5-0); \quad (x \to 5+0).$$

Будем в дальнейшем обозначать высказывание "x стремится к x_0 слева" (x стремится к x_0 справа") так: $x \to x_0 - 0$ $(x \to x_0 + 0)$

б) Пусть x $\to$ 5, принимая все значения множества вещественных чисел. Геометрически это можно проиллюстрировать так:



Мы рассмотрели высказывание "$x \to x_0$"

Рассмотрим высказывание "$x \to \pm\infty$"

Определение 2. Независимая переменная "x" стремиться к $\pm\infty$, если для любого сколь угодно большого положительного числа M можно указать такие значения "x", начиная с которых будет выполняться неравенство $|x| > M$.

Данное определение в символах можно записать следующим образом:

$$(x \to \pm\infty) \Leftrightarrow (\lim x = \pm\infty)$$

Замечание. Если "x" стремится только к $+\infty$, то это записывается так: $(x \to \infty) \Leftrightarrow (\lim x = +\infty)$

а если $(x \to -\infty) \Leftrightarrow (\lim x = -\infty)$.

§ 2. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Пусть дана функция $y = f(x)$ и пусть $x \to x_0$ или $x \to \pm\infty$. Можно поставить вопрос: как изменяется при этом переменная y?

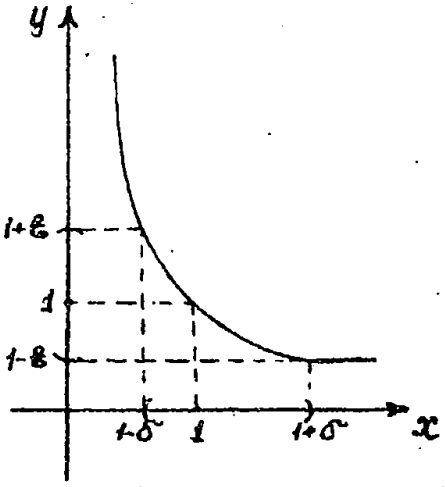
Например, пусть $y = \frac{1}{x}$ и $x \to 1$ слева или справа. Легко видеть, что $y \to 1$. Из приведенного примера видно, что для описания понятия предела функции нужно учесть систему высказываний "$x \to 1$" и "$y \to 1$", которую удобно

задать в виде совокупности неравенства.

Таким образом, в приведенном примере понятие предела функции y при стремлении аргумента x к 1, запишется:

$$\lim y = 1 \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in E} (0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon)$$

Это понятие можно проиллюстрировать геометрически.



Из чертежа видно, что для тех "x", которые "близко находятся к "1" значения функции как угодно мало будут отличаться от 1. т.е. как только "x" попадают в окрестность точки x=1 радиуса δ, так значения функции попадают в окрестность точки y = 1 радиуса ε.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 (в самой точке функция может быть и неопределена).

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 и записывают:

$$f(x)\in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta(\varepsilon)>0}\forall_{x\in E}(x\in U_\delta(x_0)\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\text{т.е. } [\lim_{x\to x_0} f(x)=A] \Leftrightarrow [(\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta(\varepsilon)>0})(\forall_{x\in E} x\in D: |x-x_0|<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)]$$

Аналогично вводится понятие предела функции при $x \to \pm\infty$.

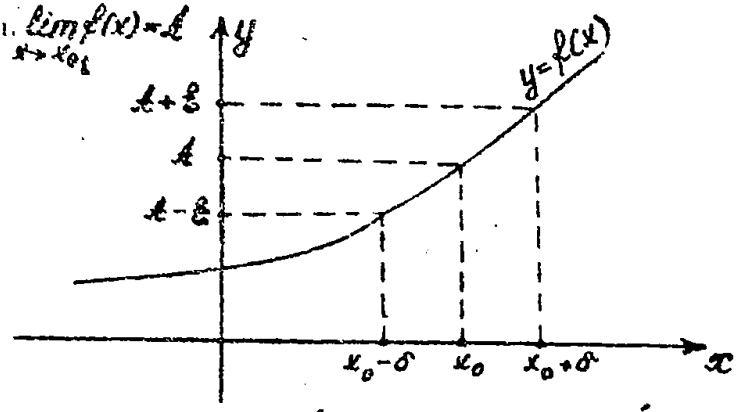
Определение 4. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в бесконечности, и записывают:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{M(\varepsilon)>0}\forall_{x\in E}(|x|>M\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ.

Пусть даны два множества E, M и закон отображения f.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$



Рассмотрим некоторую $\mathcal{E}$ - окрестность точки A - $U_\varepsilon(A)$.

С помощью закона f окрестность $U_\varepsilon(A)$ отобразится в окрестность точки "x_0" радиуса δ - $U_\delta(x_0)$. Очевидно, что с уменьшением $\mathcal{E}$ изменяется и δ, т.е. радиус окрестности точки "x", зависит от $\mathcal{E}$.

Исходя из геометрических соображений понятие предела функции можно дать такое:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall_{x\in E}\ (x\in U_\delta(x_0)\Rightarrow y\in U_\varepsilon(A))$$

Проиллюстрируем понятие предела функции на примерах.

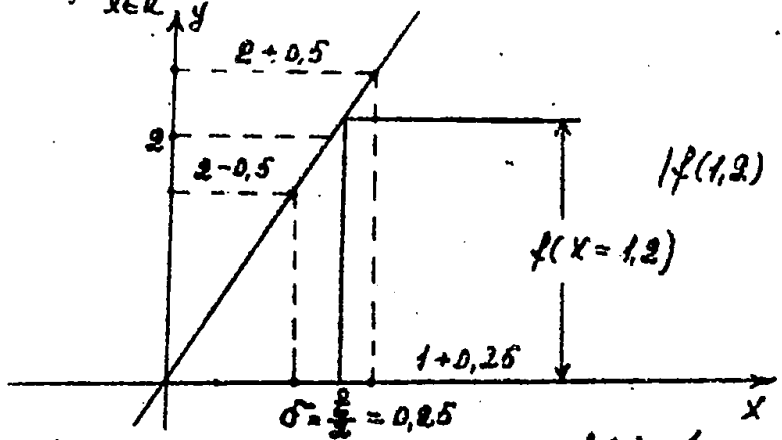
1) Показать с помощью определения, что $\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$

В определении предела функции участвует система неравенств относительно переменной "x" и переменной "y". Таким образом чтобы доказать существование предела исходя из определения, нужно построить совокупность таких неравенств.

Согласно определению имеем $|2x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, для построения неравенства относительно x, достаточно взять $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$, т.к. справедливо высказывание:

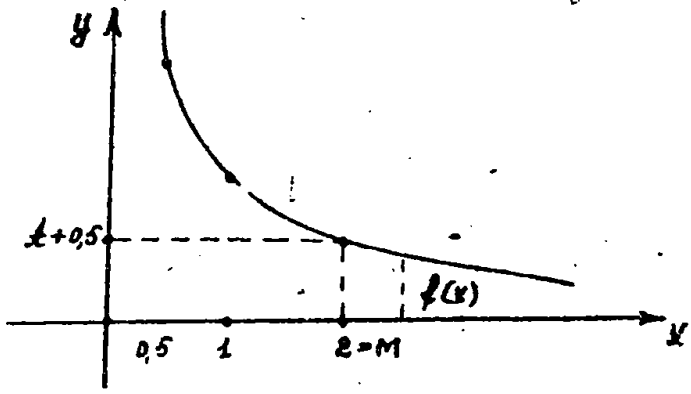
$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}\,\forall_{x\in R}\,|x-1|<\delta\Rightarrow|2x-2|<\varepsilon$$

В самом деле, возьмем $\varepsilon=0,5$, тогда $\delta=0,25$ и поэтому $\forall\limits_{x\in R}\,|x-1|<0,25\Rightarrow|2x-2|<0,5$



2) Показать, что предел функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$ равен 0. Исходя из определения, имеем: $\frac{1}{x}-0<\varepsilon\Rightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}=M$. Отсюда следует справедливость высказывания: $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{M>0}\,\forall_{x\in E}\,x>M\Rightarrow x-0<\varepsilon$

Пояснim этот пример геометрически.



Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Тогда по $\varepsilon = 0{,}5$ найдется число $N = 2$ такое, что для всех "x" которые будут больше N будет выполняться неравенство $\frac{1}{x} < 0{,}5$. Например, для $x = 3$ $\frac{1}{3} < 0{,}5$.

Замечания. 1) При отображении множества $U_\delta(A)$ на множество E можно получить окрестность $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ – не симметричную относительно точки "x_0". Тогда будем брать симметричную окрестность, принимая за δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2.

2) Рассмотренное определение предела дает способ проверки существование предела, но не дает способа его вычисления.

3) Рассмотренное определение предела функции в точке "x_0" не требует, чтобы функция в точке "x_0" была определена.

§ 4. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ.

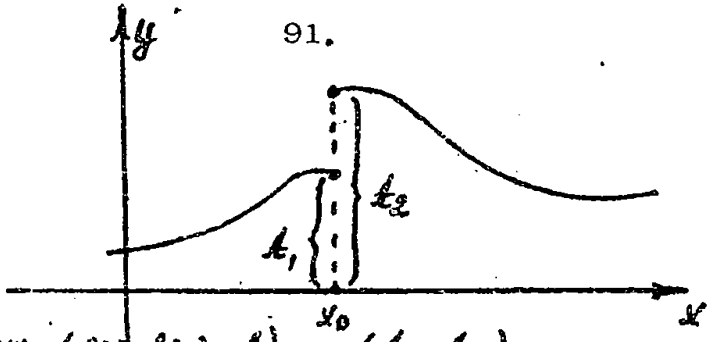
Определение. Число A_1 называется левосторонним пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0 - 0$, если $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in E}\, (x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon)$

и записывают,

$$A_1 = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in E} \left(x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon\right)$$

Аналогично вводится понятие правостороннего предела:

$$A_2 = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in E} \left(x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon\right)$$



Замечание: $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A) \Leftrightarrow (A_1 = A_2)$

§ 5. Понятие предела функции нескольких переменных.

Введем понятие предела для функции двух и большого числа переменных.

Определение: Пусть дана функция любого конечного числа переменных (функция точки) $U = f(M)$. И пусть точка $M \to M_0$. Тогда число A называется пределом функции $U = f(M)$ при $M \to M_0$, если

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{M \in E} (|MM_0| < \delta \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon)$$

и записывают:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{M \in E} (|MM_0| < \delta \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon)$$

Точки M и M_0 рассматриваются либо на плоскости, либо в трехмерном пространстве.

§ 6. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА.

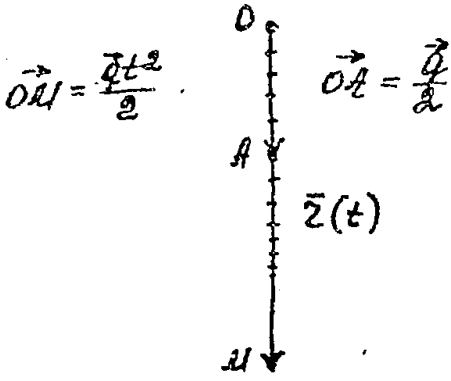
Определение. Вектор $\bar{a}$ называется пределом векторной функции $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{t \in E} (|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\bar{r}(t) - \bar{a}| < \varepsilon)$$

и записывают: $\lim \bar{r}(t) = \bar{a}$

Пример: Пусть $t \to t_0$ $\bar{r}(t) = \frac{\bar{a}t^2}{2}$ и пусть $t \to 1$

Вычислим: $\lim\limits_{t\to 1}\bar{z}(t)=\lim\limits_{t\to 1}\frac{\bar{Q}}{2}\cdot t^2=\frac{\bar{Q}}{2}\left(|\bar{Q}|=9{,}8\frac{см}{сек^2}\right)$



§ 7. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ.

Определение. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если:

а) она определена в этой точке x_0;

б) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta}\forall_{x\in E}\left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$

Можно дать другое определение непрерывности:

Определение. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если:

а) она определена в этой точке x_0,

б) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$

Аналогично можно дать понятие непрерывности для функции любого числа переменных.

Определение. Функция $u=f(M)$ непрерывна в точке M_0, если:

а) она определена в точке M_0;

б) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{M\in E}\left(|MM_0|<\delta\Rightarrow|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon\right)$

Имеет другое определение:

Функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M_0, если:

а) она определена в этой точке;

б) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

Определение. Функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Определение. Функция $u = f(M)$ непрерывна в области G, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Очень важный вывод.

Из определения непрерывности функции в точке следует:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim x_0),$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim x)$

Таким образом, для всякой непрерывной функции операция "перейти к пределу" перестановочна с любой математической операцией.

Можно доказать теорему: всякая элементарная функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке ее определения области E.

Тогда справедливы следующие правила вычисления пределов:

1) $\lim C = C$

2) $\lim (u \pm v) = \lim u \pm \lim v$

3) $\lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$

4) $\lim C \cdot u = C \cdot \lim u$

5) $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, где $\lim v \neq 0$

6) $\lim f^{-1}(x) = f^{-1}(\lim x)$

7) $\lim f[\varphi(x)] = f[\varphi(\lim x)]$

Таким образом, чтобы вычислить предел непрерывной элементарной функции $y=f(x)$ в точке "x_0", нужно в выражение под знаком предела вместо "x" подставить предельное значение "x_0".

Замечание. Сформулированные правила справедливы и для функции любого числа переменных.

Примеры: Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}=\dfrac{4-8+1}{4+1}=-\dfrac{3}{5}$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos^2 4x}=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

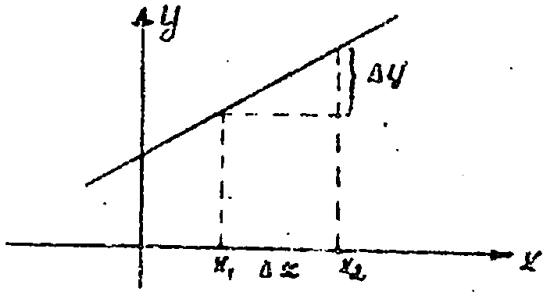
в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)=5$

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}}\dfrac{2x^2+y}{x+y}=\dfrac{2+4}{5}=\dfrac{6}{5}$

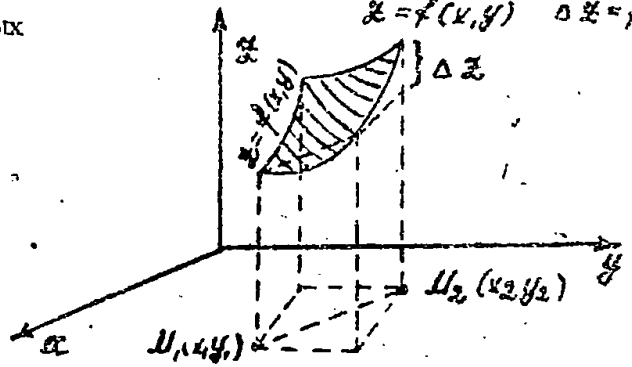
Очень часто при доказательстве непрерывности функции используют понятие непрерывности через приращения функции и аргументов.

Введем понятие приращения функции и аргументов для функции одного и двух переменных.

Определение. Пусть дана функция $y=f(x)$. Разность между двумя значениями аргумента x_1 и x_2 называется приращением аргумента и обозначается $\Delta x=x_2-x_1$, а разность соответствующих значений функции называется приращением функции и обозначается: $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$



Аналогично можно ввести приращение функции двух переменных



Тогда определение непрерывности в точке для функции одного переменного можно дать следующее :

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке "x_0", если:

а) она определена в точке "x_0",

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Для функции двух переменных:

Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке M_0, если:

а) она определена в этой точке M_0,

б) $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$

Примеры. 1. Доказать, что функция $f(x) = x^3 + 1$ непрерывна в каждой точке множества R. Возьмем первоначальное значение аргумента x, а новое $x + \Delta x$. Тогда

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = \Delta x\left[(x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + \Delta x^2\right]$$

Вычислим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim\left[(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+\Delta x^2\right]=0$

Что и требовалось доказать.

2. Показать, что функция $z=x^2+y^2$ непрерывна в каждой точке множества $P=\{M(x,y)/x\in R\wedge y\in R\}$

В самом деле, найдем $\Delta z=f(x+\Delta x),\ y+\Delta y)-f(x,y)=$
$=\left[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y^2)\right]-(x^2+y^2)=2x\Delta x+\Delta x^2+2y\Delta y+\Delta y^2$

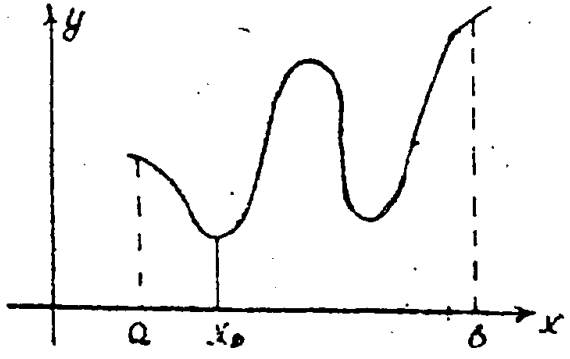
Вычислим

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[2x\Delta x+\Delta x^2+2y\Delta y+\Delta y^2\right]=0$$

Что и требовалось доказать.

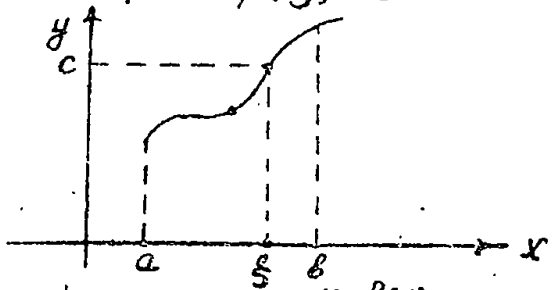
§ 5. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ $[a, b]$.

1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на этом отрезке, то функция принимает по крайней мере один раз значение m и один раз значение M.

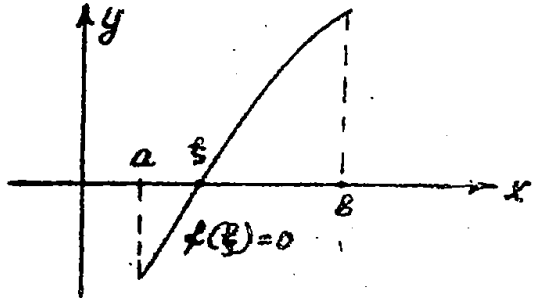


$f(x_0)=m,$
$f(b)=M.$

2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и число $C\in[m,M]$, то существует такая точка $\xi\in[a,b]$, что $f(\xi)=C$.



3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется по крайней мере одна такая точка ξ, что $f(\xi)=0$.



§ 9. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ.

Теорема 1. (О единственности предела).

Если функция $y=f(x)$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство.

Пусть $\lim f(x)=A_1$ и $\lim f(x)=A_2$ и предложим, что $A_1\neq A_2$. Тогда можно выбрать такие окрестности $U_\varepsilon(A_1)$ и $U_\varepsilon(A_2)$, которые разъединены, т.е. не пересекаются $U_\varepsilon(A_1)\cap U_\varepsilon(A_2)=\varnothing$. Если существует $A_1=\lim f(x)$, то окрестность $U_\varepsilon(A_1)$ отображается в окрестность $U_\delta(x_0)$ и

тогда всякому $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ будет соответствовать $y \in U_\varepsilon(A_1)$ и не будет ни одного "у" в $U_\varepsilon(A_2)$, т.е. образы окрестности $\mathring{U}_\delta(x_0)$ будут принадлежать только одной окрестности $U_\varepsilon(A_1)$, и не будут принадлежать окрестности $U_\varepsilon(A_2)$, а значит $A_2 \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Следовательно, предположение, что $A_1 \neq A_2$ неверно, т.е. $A_1 = A_2$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в окрестности точки x_0.

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall_{x \in E} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall_{x \in E} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall_{x \in E} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon$

$< f(x) < A + \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall_{x \in E} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| < |A| + \varepsilon)$, т.е.

Функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0.

Следующие две теоремы (3,4) приводятся без доказательства.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ ограничена и является монотонной на множестве E, то она имеет предел.

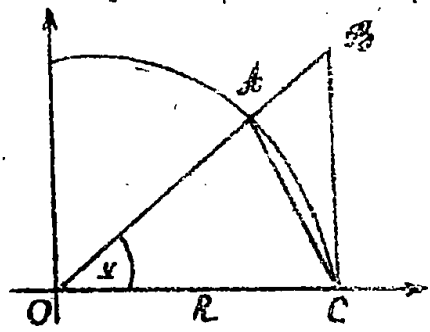
Теорема 4. Если две функции имеют один и тот же предел, то и третья функция, заключенная между ними, стремится к этому же пределу, т.е. $\lim u(x) = \lim v(x) = A$ и $v(x) < f(x) < u(x)$; тогда и $\lim f(x) = A$.

Теорема 5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ -}$$

Доказательство.

Для доказательства сравним площади геометрических фигур: треугольника OAC, сектора OAC и треугольника OBC ..



Очевидно, что $S_{\Delta OAC} < S_{сек\,OAC} < S_{\Delta OBC} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Тогда на основании теоремы 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

– первый замечательный предел.

Замечание. Доказательство велось для $x > 0$. Аналогично можно доказать, что $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, и для $x < 0$

Пример. Вычислить $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim \frac{3 \cdot \sin(3x)}{(3x)} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{(3x)} = 3 \cdot 1 = 3.$

Теорема 6. При $n \to \infty$ выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ заключено между числами 2 и 3, т.е.

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

$n \to \infty$

Доказательство. Рассмотрим числовую последовательность $\{y_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Докажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная. А тогда на основании теоремы (2)

эта последовательность будет иметь предел.

Запишем общий член последовательности

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

и последующий член последовательности

$$y_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Сравнивая y_n и y_{n+1} можно сделать заключение о том, что $y_n<y_{n+1}$, т.к.: 1) все слагаемые положительные, 2) y_{n+1} содержит на одно слагаемое больше, чем y_n, 3) сами слагаемые в y_{n+1} больше, чем слагаемые в y_n.

Итак, для любого n $y_n<y_{n+1}$, т.е. последовательность возрастающая; покажем, что она ограничена. Очевидно, что снизу эта последовательность ограничена числом 2. Убедимся, что она ограничена сверху.

$$y_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}<1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

Итак, $2\le y_n<3$, т.е. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ограничена и имеет предел

Определение. Число "e" называется предел переменной величины $y_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2,7182818284$

Иногда число "e" записывают в другой форме. Обозначим $\frac{1}{n}=\alpha$. Тогда при $n\to\infty$ $\alpha\to 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

Пример. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{n}{3}}\right]^{-3}=e^{-3}$$

§ 10. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ.

Логарифмы с основанием "e" называются натуральными логарифмами и обозначаются $\log_e N = \ln N$. Между десятичными и натуральными логарифмами можно установить зависимость. Логарифмируя равенство $e^{\ln N} = N$ по основанию 10, получим $\ln N \cdot \lg e = \lg N$, но, $\lg e = 0{,}4342$ или $\lg N = 0{,}4342 \cdot \ln N$ $\lg N = 2{,}3 \ln N$

§ 11. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Бесконечно малые величины.

Определение. Функция $y = f(x)$ и наз. бесконечно малой и обозначается $\alpha(x), \beta(x), \delta(x), \dots \delta(x)$ если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \alpha(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \beta(x) = \dots = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \delta(x) = 0$ или

1. $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией в точке x_0, если $\forall_{\varepsilon>0}\exists\delta(\varepsilon)>0\forall_{x\in E}(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon)$
2. $\alpha(x)$ называется бесконечно малой на бесконечности, если $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N(\varepsilon)>0}\forall_{x\in E}(|x|>N\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon)$

Примеры: а) $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$

б) $\alpha(x) = 2x - 1$ при $x \to \frac{1}{2}$

Бесконечно большие величины

Определение. Функция $y = f(x)$ наз. бесконечно большой и обозначается $\alpha(x), \beta(x)$, если при любом предельном переходе $\lim\alpha(x) = \lim\beta(x) = \dots = \infty$, или:

1. $y = f(x)$ называется бесконечно большой функцией в точке x_0, если $\forall_{M>0}\exists\delta>0\forall_{x\in E}(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M)$
2. $y = f(x)$ называется бесконечно большой функцией на бесконечности, если $\forall_{M>0}\exists_{N(M)>0}\forall_{x\in E}(|x|>N\Rightarrow|f(x)|>M)$

Пример:

а) $\alpha(x) = \frac{1}{x-2}$, при $x \to 2$

б) $\alpha(x) = 2^x$, при $x \to +\infty$

§ 12. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную, есть функция бесконечно малая, т.е.

$\alpha(x) \cdot \beta(x) = \gamma(x)$

где: $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, а $|\beta(x)| < M$ (ограничена)

где $\beta(x) < M$

Следствие: произведение конечного числа бесконечно малых, есть бесконечно малая функция, т.е. $\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x) = \alpha(x)$

где n – конечное число.

3. Отношение двух бесконечно малых функций есть функция неопределенная, т.е. это может быть и конкретное число, и беско-

1. Сумма двух бесконечно больших величин $A_1(x)$ и $A_2(x)$ может оказаться:

а) $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = \infty$

если $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = +\infty$

или $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = -\infty$

б) $A(x) + A_2(x)$ – неопределенностью, т.е. либо конкретным числом A, либо нулем, либо бесконечно большим числом, либо величиной не существующей вообще, если

$\alpha_1(x) = +\infty$, а $\alpha_2(x) = -\infty$, то

$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = \infty - \infty$

2. Произведение бесконечно большой функции на любую функцию (кроме функции бесконечно малой) есть бесконечно большая функция. Произведение же бесконечно большой на бесконечно малую функцию есть неопределенная функция, т.е. это может быть конкретное число, нуль,

нечность, и нуль, и функция не существующая вообще.

Символически это можно записать так:

$\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$ — неопределенность

или

$$\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{0}{0} = \begin{cases} \text{а) конечное число } A, \\ \text{б) нуль} - 0 \\ \text{в) бесконечность} - \infty \\ \text{г) не существ. функция} \end{cases}$$

4. Величина, обратная бесконечно малой функции, есть функция бесконечно большая, т.е.

$\frac{1}{\alpha(x)} = \mathcal{A}(x)$ — символически это можно записать так: "$\frac{1}{0} = \infty$", но эта запись чисто символическая над символами "0" и "∞" никаких действий не производит.

бесконечность, или функция не существующая вообще.

Символически это выразится так: $\alpha(x) \cdot \mathcal{A}(x) = 0 \cdot \infty$ — неопределенность.

3. Отношение двух бесконечно больших функций есть функция неопределенная, т.е.

$$\frac{\mathcal{A}_1(x)}{\mathcal{A}_2(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \begin{cases} \text{а) } A\text{-конечное число,} \\ \text{б) } 0 - \text{нуль} \\ \text{в) } \infty - \text{бесконечность} \\ \text{г) не существ. функ.} \end{cases}$$

Величина, обратная бесконечности большой функции, есть функ. бесконечно малая, т.е. $\frac{1}{\mathcal{A}(x)} = \alpha(x)$, или в символах: "$\frac{1}{\infty} = 0$". Последняя запись является чисто символической, над знаками "∞" и "0" действий никаких не производят.

§ 13. ТЕОРЕМА О СВЯЗИ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ФУНКЦИИ С ПРЕДЕЛА.

Для того, чтобы некоторая функция $f(x)$ имела пределом число "A", необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде суммы числа "A" и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in U_\delta(x_0)) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

отсюда следует, что $f(x) = A + \alpha(x)$, т.к. разность $[f(x)-A]$ можно положить равной $\alpha(x)$, причем, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция. Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, тогда

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in U_\delta(x_0)) \Rightarrow |f(x)-A| = |\alpha(x)|<\varepsilon,$$

а это значит, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

§ 14. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ.

Для сравнения двух бесконечно малых функций вычисляют предел их отношения.

Определение.

Если $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$

- "P_1" то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции одинакового порядка малости;
- "0" то $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция высшего порядка малости, чем $\beta(x)$;
- "∞" то $\alpha(x)$ – бесконечная функция низшего порядка малости, чем $\beta(x)$; , "не существует" – то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимые бесконечно-малые функции.

1°. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентные бесконечно малые функции

Символически это обозначается так

$$\alpha(x) \sim \beta(x)$$

Примеры:

1. Сравнить две бесконечно малые функции $\alpha(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$

Для сравнения их вычислим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

такого предела не существует. Значит функция "x" и $\sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$ являются несравнимыми.

2. Сравнить $\alpha(x) = x^3$ и $\beta(x) = x$. Вычислим: $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$, значит функция x^3 бесконечно малая высшего порядка малости, чем "x".

3. Сравнить $\alpha(x) = 1 - \cos x$ и $\beta(x) = x^2$

Вычислим $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Можно провести примеры эквивалентных бесконечно малых функций, доказательство эквивалентности которых очевидно:

1. $\sin[\alpha(x)] \sim \alpha(x)$,
2. $\operatorname{tg}[\alpha(x)] \sim \alpha(x)$,
3. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$
4. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
5. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$

§.15.: ТЕОРЕМЫ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЯХ.

Теорема 1.

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения функций, эквивалентных данным, т.е., если

$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, а $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

Доказательство.

Из эквивалентности данных функций следует, что

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} = 1; \quad \lim \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = \lim \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1$$

Вычислим: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}\right) = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim \frac{\beta_1}{\beta} =$

$= \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна бесконечно малой функции низшего порядка малости.

Доказательство.

Пусть $S(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)$; $\alpha_i(x) (i = 1, 2, 3, \dots n)$ - бесконечно малая функция низшего порядка малости, чем $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$. Тогда $\lim \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_i(x)} = \lim \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_i(x)} = \dots = \lim \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_i(x)} = 0$ Вычислим

$$\lim \frac{S(x)}{\alpha_i(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_i(x) + \dots \alpha_n(x)}{\alpha_i(x)} = \lim \left[\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_i(x)} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_i(x)} + \dots + 1 + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_i(x)}\right] = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_i(x)} + \lim \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_i(x)} + \dots + \lim 1 + \dots + \lim \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_i(x)} = 1, \text{ т.е. } S(x) \sim \alpha_i(x)$$

В заключении следует отметить, что в некоторых случаях можно ввести количественную оценку порядка малости по отношению к другой функции.

Определение. Если $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = A \neq 0$, , (А–конечное число), то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция "к–го" порядка малости по сравнению с $\beta(x)$. Функция $\beta(x)$ называется определяющей бесконечно малой функцией для $\alpha(x)$. Обычно в качестве определяющей функции берут функцию $y = x$.

Пример. Определить порядок малости функций $y = 1 - \cos 3x$ и $y = x^2$.

когда $x \to 0$. Здесь определяющая функция $\beta(x) = x$

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{3}{2}x}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin \frac{3}{2}x}{x}\right)^2 =$

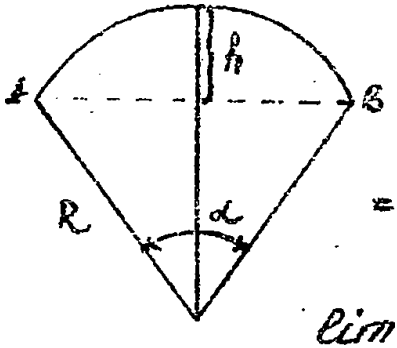
$= 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3}{2}\sin \frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2 = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\sin \frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2 = \frac{9}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2 =$

$= \frac{9}{2} \neq 0$

Значит функция $y = 1-\cos 3x$ является бесконечно малой функцией второго порядка малости по сравнению с "x". Легко видеть, что для степенной функции порядок малости совпадает с ее показателем. Однако, не всегда можно дать количественную оценку порядка малости сравнимых бесконечно малых функций.

Пример. Определить порядок малости "стрелки" кругового сегмента относительно бесконечно малой дуги сегмента.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{h}{\smile AB} =$



$= \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{R - R\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha \cdot R} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = 2\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}{\alpha} = 0$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{\alpha}{4}}{\alpha^2} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{2}{16} \frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{4}}{\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}} =$

$= \frac{1}{8}$. *Следовательно, "стрела" имеет второй порядок малости.*

§ 16. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ.

В рассматриваемом курсе высшей математики теория пределовбудет использоваться для:

1) Вычисления самих пределов;

2) отыскания и классификации точек разрыва функций;

3) определения асимптот графиков функций;

4) введения новых математических операций: дифференцирования, интегрирования и др.

1. Вычисление пределов.

Если вычисляется предел функции $y=f(x)$ в точке x_0, где эта функция непрерывна, то нахождение предела сводится к вычислению функции при $x = x_0$.

Например: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos^2 2x} = \frac{1+\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{1-\cos^2 2\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{2} = 1.$

Как видно, решение этой задачи труда не представляет. Более трудоемкой работой является вычисление предела функции $y=f(x)$ в точке x_0, где эта функция не определена. Вычисление предела функции, в которую предварительно вместо "x" подставлено x_0 приведет к одной из неопределенностей типа (1) $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или 1^∞, ... или

к одной из неопределенностей вида (2): $0^0, 0\cdot\infty, \infty^0, \infty-\infty, 0^\infty$.

Неопределенности вида (2), путем их преобразования, могут быть приведены к неопределенностям (1).

Рассмотрим следующие случаи нахождения предела функции:

1. Случай, когда при $x \to x_0$, или $x \to \infty$ предел $y(x)$ представляет собой отношение двух бесконечно малых функций (неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

В этом случае следует либо воспользоваться первым замечательным пределом, либо бесконечно малые функции разложить на множители и сократить на множители, стремящиеся к нулю. Если же одна, или обе бесконечно малые функции содержат иррациональность, то следует умножить эти функции на выражения им сопряженные.

Примеры, а) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right) = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{(\frac{x}{3})} = \frac{1}{3}$

б) вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1} = 1$

в) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3} = \frac{2}{3}$

2. Случай, когда при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ предел $y(x)$ представляет собой отношение двух бесконечно больших функций (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).

В этом случае следует обе функции разделить на наивысшую степень "x", либо выполнить разложение функций на множители сократить на множитель, стремящиеся к нулю.

Примеры: а) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{2}{3}$

б) Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg\,2x}{ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = +\frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = +\frac{1}{2}$$

3. Случай, когда при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет собой степень, основание которой стремится к 1, а показатель – к бесконечности (случай 1^{∞}).

В этом случае следует воспользоваться вторым замечательным пределом.

Примеры: а) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-3n}\right)^{-3n}\right]^{-\frac{1}{3}} =$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{-3n}\right)^{-3n}\right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}};$$

б) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 = e^2;$

Аналогично вычисляются пределы функций двух и большего числа переменных.

Примеры. а) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy\,(2+\sqrt{xy+4})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-xy-4}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = -\frac{1}{4};$$

б) Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$

Если такой предел существует, то точка $M_{(x,y)}$ стремится к точке M_0 (0;,2) по любому пути (линии). В качестве такой линии выберем прямую с уравнением $x + y = 2$. Из этого уравнения легко видеть, что при $x \to 0$, $y \to 2$. Тогда, полагая

$y = 2 - x$, будем иметь: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin[x(2-x)]}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin[x(2-x)](2-x)}{x(2-x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin[x(2-x)]}{x(2-x)} \cdot \lim_{x\to 0}(2-x) = 2$$

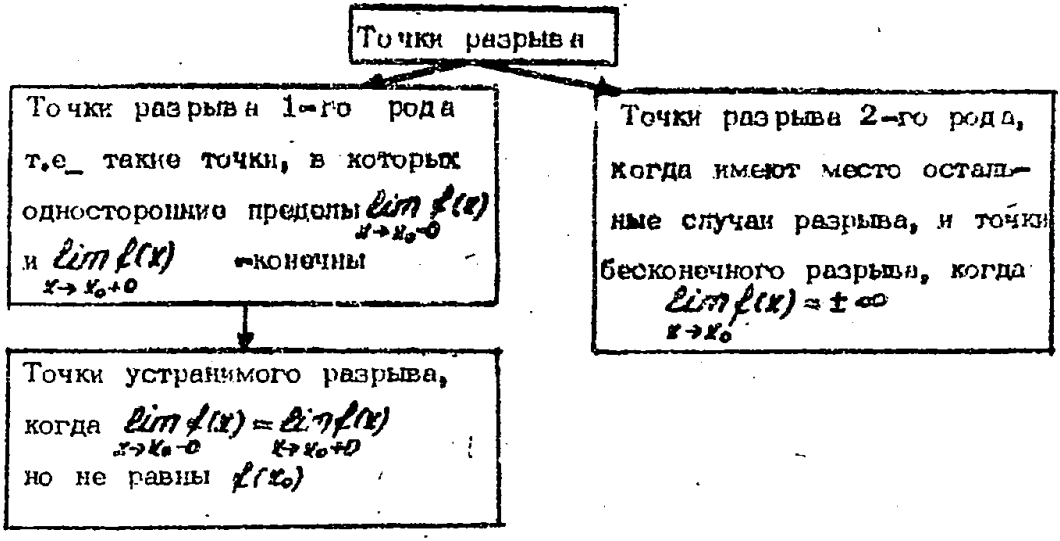
в) Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}$.

На основании рассуждений в примере б) положим $y = kx$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+kx} = \frac{1}{1+k}$, это значит, что определенного предела не существует, т.к. "k" принимает различные значения.

2. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ.

Определение. Точками разрыва функции называются такие точки, в которых нарушено хотя бы одно из условий непрерывности функций.

Приведем следующую схему классификации точек разрыва.



Классификация точек разрыва.

Пример. Найти точки разрыва функций:

1) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

2) $y = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ 3) $y = e^{-\frac{1}{x+3}}$

1) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x = 0$ – точка разрыва. Определим к какому роду эта точка. Вычислим: $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$

односторонние слева и справа конечны, но не равны, следовательно $x = 0$ – точка разрыва 1-го рода.

Абсолютная величина разности левостороннего и правостороннего пределов называется скачком функции. Скачок функции $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ равен $\left|-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = \pi$.

2) $y = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x = 1$ – точка разрыва. Вычислим: $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{2}{1+e^{-\infty}} = 2$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{2}{1+e^{+\infty}} = 0$

$x = 1$ – точка разрыва 1-го рода. Скачок функции равен 2.

3) $y = e^{-\frac{1}{x+3}}$ $x = -3$ – точка разрыва функции.

Вычислим: $\lim\limits_{x\to -3-0} e^{-\frac{1}{x+3}} = e^{-\infty} = 0$; $\lim\limits_{x\to -3+0} e^{-\frac{1}{x+3}} = e^{+\infty} = +\infty$

$x = -3$ – точка бесконечного разрыва, а уравнение $x = -3$ будет представлять собой определенную линию, о которых речь пойдет в следующем разделе.

5. АСИМПТОТЫ

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия с уравнениями $y = kx + b$ и $x = x_i$, к которой неограниченно приближается график данной функции.

Асимптоты бывают вертикальные и наклонные.

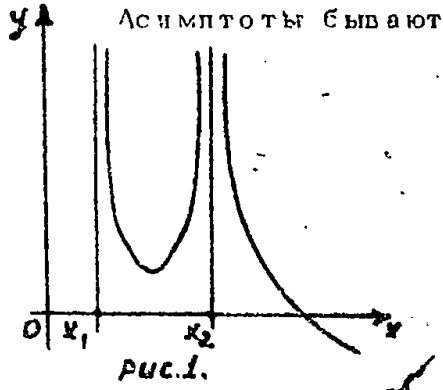


рис. 1.

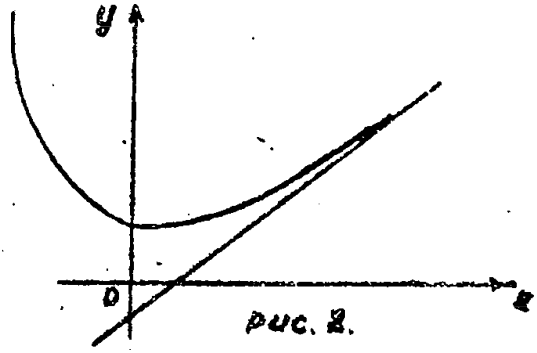


рис. 2.

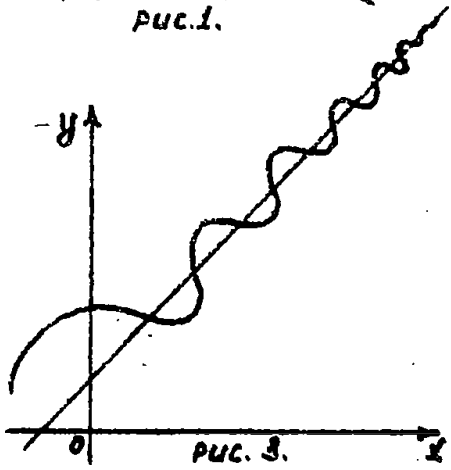


рис. 3.

На рисунке (1) изображены вертикальные асимптоты с уравнениями $x = x_1$ и $x = x_2$ причем, точки x_1 и x_2 являются точками бесконечного разрыва функции. Легко видеть, что в точках бесконечного разрыва функции всегда будут вертикальные асимптоты графика данной функции. Уравнения вертикальных асимптот имеют вид $x = x_i$, где x_i – точки бесконечного разрыва функции.

На рисунках 2, 3, 4 изображены наклонные асимптоты, которые описываются уравнением $y = kx + b$. Отсюда видно, что для получения наклонной асимптоты графика данной функции $y = f(x)$ следует найти параметры "к" и "в". При отыскании параметров "к" и "в" воспользуемся следующим фактом : если прямая линия $\mathcal{L}$

является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, то расстояние любой точки, принадлежащей графику функции от прямой $\mathcal{L}$ стремится к нулю при неограниченном удалении абсциссы "x" этой точки от начала координат (т.е. когда $x \to \infty$).

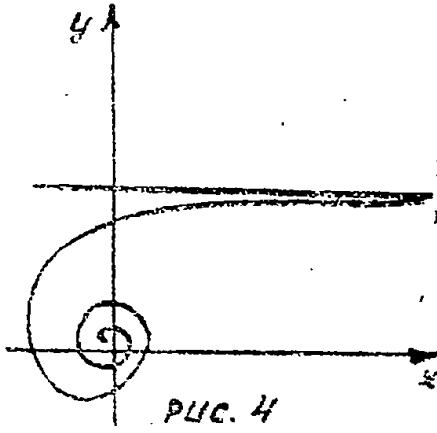


РИС. 4

На рис. 5 видно, что $MN = MK\cos\alpha$, но $MN \to 0$ при $x \to \infty$.

$$MK = NP - PK = f(x) - (kx + b),$$

$$MK = \frac{MN}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2},$$

т.к. данная асимптота наклонная, а не вертикальная. Тогда при $MN \to 0$, $MK \to 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0,$$

откуда $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\quad b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$

Следует заметить, что если хотя бы один из параметров "k" или "b" не существует, то график функции наклонных асимптот не имеет.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Найдем область определения функции – множество E =

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty),$$

откуда видно, что $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – точки разрыва.

Исследуем их характер, для чего вычислим:

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x^3}{x^2-1} = \mp\infty, \quad \lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^3}{x^2-1} = \mp\infty,$$

Поэтому x_1 и x_2 точки бесконечного разрыва. Значит график функции имеет вертикальные асимптоты с уравнениями $x = \pm 1$. Для определения наклонных асимптот вычислим

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = x$.

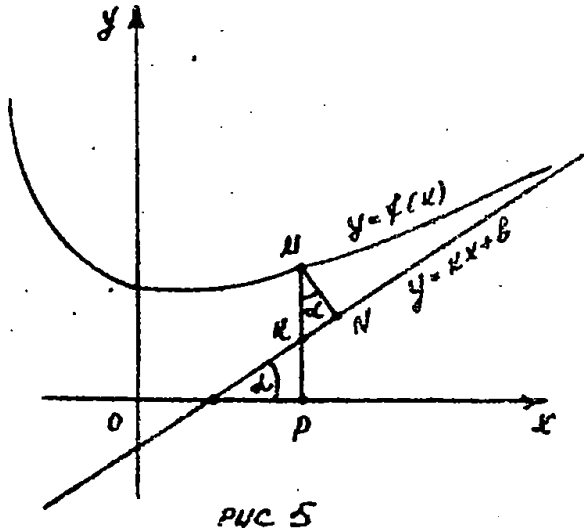


РИС 5

Глава У.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В этом разделе будут изучены следующие вопросы:

1. Определение операции "дифференцирования",
2. Правила выполнения этой операции,
3. Приложения операции "дифференцирования".

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИИ "ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ" ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

Операция "дифференцирования" связана с понятием производной от функции. С помощью этого понятия можно уже количественно характеризовать тот или иной процесс. Так, например, зная производную, можно установить как быстро или как медленно (т.е. с какой скоростью) протекает этот процесс. Поэтому с понятием производной ассоциируется понятие скорости. Операция отыскания производной называется операцией дифференцирования. Введём понятие производной от функции.

Пусть дана функция $y=f(x)$. Примем значение аргумента „x" равное „x_0", т.е. $x=x_0$.
Сообщим значению аргумента x_0 приращение Δx.
Тогда новое значение аргумента "x" будет равно

$x_0+\Delta x$, т.е. $x=x_0+\Delta x$,

а соответствующее ему новое значение функции будет

$f(x_0+\Delta x) = f(x_0)+\Delta y = y_0+\Delta y$

Приращение функции в точке x_0 будет равно

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Составим отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$, которое называется дифференциальным отношением.

Вычислим предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (если такой предел существует) называется производной от функции $y = f(x)$ по переменной "x" в точке "x_0".

Итак, производной от данной функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении приращения аргумента к нулю и обозначается :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y'_x = x_0$$

Производная от функции в любой точке обозначается через $f'(x)$ или y'_x и представляет собой функцию от "x".

Пример. 1. Дана функция $f(t) = \frac{1}{2} g t^2$, найти производную в любой точке и в точке $t = 10$ сек.

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} g \frac{[(t+\Delta t)^2 - t^2]}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = gt$$

$$f'(t) = gt, \quad f'(10) = 10g.$$

2. $y(x) = x^3$ Найти производную в любой точке.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

§2. ТЕОРЕМА О СВЯЗИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ С НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируемая в точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Пусть дана функция $y = f(x)$ дифференцируемая в точке x_0, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

На основании теоремы о связи предела переменной с бесконечно малой, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$

где α – бесконечно малая величина.

Тогда $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ (1)

Найдем $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x] = 0$

Следовательно, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. А это значит, что в точке x_0 данная функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: из условия непрерывности функции в точке не следует, что она дифференцируема в этой точке.

Приведем такой пример.

Пусть $y = |x + 1|$. Покажем, что в точке $x = -1$ данная функция непрерывна, но не дефференцируема.

Найдем приращение функции в точке $x = -1$

$$\Delta y = |(-1 + \Delta x) + 1| - |-1+1| = |\Delta x|;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0,$$

т.е. в точке $x = -1$ данная функция непрерывна.

Вычислим производную от этой же функции в точке $x = -1$.

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{при } \Delta x < 0 \\ 1, & \text{при } \Delta x > 0 \end{cases}$$

Таким образом, в точке $x = -1$ предела дифференциального отношения не существует, а следовательно, и производная так же не существует.

Равенство, полученное при доказательстве предыдущей теоремы, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$ является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в точке.

§3. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

Теорема 1. Если функция $y = C$ (const), то $y'_x = 0$.

Доказательство. В самом деле, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$.

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и поэтому $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Теорема 2. Если функция $y = x^n$ $(n \in R)$, то $y'_x = n x^{n-1}$;

Доказательство. Сообщим аргументу "x" приращение Δx. Тогда приращение функции будет равно

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Найдем $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\Delta x}$

$$= x^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} = x^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n} - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{n \cdot \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)} - 1}{\Delta x} = x^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{n\frac{\Delta x}{x}} - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n \cdot \Delta x}{x \cdot \Delta x} = n \cdot x^{n-1}.$$

Например, $y = x^5$, $y' = 5x^4$

В частности, если $y=x$, то $y'_x = 1$

Теорема 3. Если функция $y = a^x$, то $y'_x = a^x \ln a$

Доказательство. Вычислим $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$

Тогда $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$

$$= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Пример. $y = 3^x$, $y'_x = 3^x \ln 3$.

Теорема 4. Если функция $y = \sin x$, то $y'_x = \cos x$.

Доказательство. Вычислим $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$.

Тогда $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Теорема 5. Если функция $y = \cos x$, то $y'_x = -\sin x$

Доказательство. Вычислим

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Тогда $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x$$

§4. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

1. Правило дифференцирования суммы.

Производная от алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных слагаемых, т.е. если $y = u(x) \pm v(x)$, то $y'_x = u'(x) \pm v'(x)$.

Докажем. Пусть $y = u + v$, где u и v дифференцируемые функции. Сообщим аргументу "x" приращение "Δx".

Тогда функции u и v также получат приращения Δu и Δv.

Тогда $\Delta y = [(u + \Delta u) + (v + \Delta v)] - (u + v) = \Delta u + \Delta v$

Найдем $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$

(т.к. функции u и v по условию дифференцируемы).

Пример. Пусть $y = x^3 + \sin x - 5^x$, найти y'_x.

$$y' = 3x^2 + \cos x - 5^x \ln 5$$

Замечание. Правило дифференцирования разности двух дифференцируемых функций доказывается аналогично.

2. Правило дифференцирования произведения.

Производная от произведения двух дифференцируемых функций u и v равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое представляет собой произведение производной от первого сомножителя на неизменный второй сомножитель, второе слагаемое – произведение производной от второго сомножителя на неизменный первый сомножитель, т.е. если

$y = v \cdot u$, то $y' = u'v + uv'$

Доказательство. $\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \cdot \Delta v$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv'$$

Замечание. Если $y = c \cdot u$, то $y' = cu'$.

Постоянный множитель можно выносить при выполнении операции дифференцирования.

Пример. $y = 5 \sin x + 2x^{10} + 100$, найти y'_x

$y' = 5 \cos x + 20x^9$.

3. Правило дифференцирования частного.

Производная от частного двух дифференцируемых функций равна дроби: числитель дроби представляет собой разность между произведением производной числителя на знаменатель и произведением производной знаменателя на числитель, знаменатель равен квадрату знаменателя данной дроби, т.е.

если $y = \frac{u}{v}$, то $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство.

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta u \cdot v - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} v(v + \Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Замечание. Если $y = \frac{c}{v}$, то $y'_x = -\frac{cv'}{v^2}$

Примеры:

1. $y = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. $y = \operatorname{ctg} x$, $y'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

4. Правило дифференцирования сложной функции.

Пусть дана сложная функция $y = F[\varphi(x)]$, где "x" – основной (независимый) аргумент, $\varphi(x) = u$ промежуточный зависимый аргумент.

Предполагаем, что функция $y=F[\varphi(x)]$ дифференцируема по промежуточному аргументу u (т.е. существует $y'=F(u)$) и что функция $\varphi(x)$ дифференцируемая по основному аргументу x.

Тогда производная от функции "y" по основному аргументу "x" будет равна произведению производной от данной функции "y" по промежуточному аргументу u на производную от промежуточного аргумента u по основному аргументу "x", т.е. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Докажем это правило. Согласно предположения функция "y" дифференцируемая по переменной u, т.е. существует предел $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Тогда на основании теоремы о связи предела переменной величины с бесконечно малой можно записать:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \qquad \Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

Разделив обе части последнего равенства на Δx

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

откуда $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Примеры. 1. $y = (\sin x)^3$, $y'_x = 3\sin^2 x \cos x$

2. $y = \sin(x^3)$, $y' = 3x^2 \cos(x^3)$

3. $y = e^{5x} + \cos^2 3x$, $y' = 5e^{5x} - 6\cos 3x \cdot \sin 3x$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ.

а) Правило дифференцирования неявной функции.

Равенство $F(x,y) = 0$ при определенных условиях может задавать либо "у" как неявную функцию от "х", либо "х" как неявную функцию от "у". Для того, чтобы найти производную от неявной функции "у", заданной уравнением $F(y,x)=0$, нужно обе части равенства $F(x,y) = 0$ по правилу сложной функции продифференцировать по "х", считая при этом "у" как функцию от "х".

Тогда получим уравнение, содержащее y'_x, решив которое относительно y'_x, найдем y'_x.

Пример. $x^2+y^2=a^2$ $\quad 2x+2yy'_x=0$ $\quad y'_x=\frac{-x}{y}$.

Аналогично находится производная от неявной функции "х" по "у", заданной уравнением $F(x,y)=0$

$2x\cdot x'_y y+2y=0$ $\quad x'_y y=-\frac{y}{x}$

Сформулированное выше правило справедливо для неявных функций любого числа переменных.

б) Правило дифференцирования обратной функции.

Пусть дана дифференцируемая функция $y=f(x)$, для которой существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$. Тогда производная от обратной функции "х" по переменной "у" равна дроби, у которой числитель равен 1, а знаменатель равен y'_x, т.е. $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции, продифференцируем равенство $y=f(x)$ по "y", считая при этом, что переменная "x" уже будет функцией от "y".

Тогда получим $1=f'_x(x)\cdot x'_y \quad x'_y=\frac{1}{f'_x(x)}$ $\boxed{x'_y=\frac{1}{y'_x}}$

Примеры: 1. $y=\arcsin x,\ y\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\ y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sin y=\sin(\arcsin x)\ x=\sin y,\ x'_y=\cos y$

$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $y=\arccos x;\ y\in[0;\pi]\ y'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x=\cos y;\ x'_y=-\sin y\ y'_x=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=$

$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $y=\operatorname{arctg} x;\ y'_x=\frac{1}{1+x^2}$

$x=\operatorname{tg} y;\ x'_y=\frac{1}{\cos^2 y};\ y'_x=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

4. $y=\operatorname{arcctg} y;\ x'_y=-\frac{1}{1+x^2}$

$x=\operatorname{ctg} y;\ x'_y=-\frac{1}{\sin^2 y}=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}$

5. $y=\log_a x;$

$y'_x=\frac{1}{x}\log_a e;\ x=a^y\ x'_y=a^y\ln a$

$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e$

$y=\ln|x|;\ y'_x=\frac{1}{x}$

а) $x\in(0;\infty)\ y=\ln x\ y'_x=\frac{1}{x};$

б) $x\in(-\infty;0)\ y=\ln(-x)\ y'_x=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$

в) Правило дифференцирования функций, заданных параметрически. Пусть функция "у" от "х" задана параметрически.

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые по t, и для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$.

Тогда $y'_x = \frac{y't}{x't}$.

Докажем это правило. Для этого равенство $y = \psi(t)$ по правилу дифференцирования сложной функции продифференцируем по "х" считая при этом t как функцию от "х".

Тогда $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ $\quad y'_t = y't;\ t'_x = \frac{1}{x't}$ Отсюда $\boxed{y'_x = \frac{y't}{x't}}$

Примеры. 1 $\begin{cases} x = t \cdot e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\quad y'_x = \frac{\cos t}{e^t + te^t} = \frac{\cos t}{e^t(1+t)}$

2. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $\quad$ Найти $y'_{t=\frac{\pi}{4}}$

$y'_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{a\cos t}{-a\sin t}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$

3. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $\quad y'_x = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$

§ 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

С помощью операции дифференцирования от функции $y = f(x)$ можно найти ее производную

$y'_x = f'(x)$.

Если эта производная вычисляется в некоторой точке $x = x_0$, то выражение $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$ представляет собой некоторое число. Если же эта производная вычисляется в любой точке, то производная от функции $y = f(x)$ будет некоторой функцией от "x", т.е. $y'_x = f'(x) = \varphi(x)$. Эту функцию в свою очередь можно дифференцировать по "x". Тогда получим производную второго порядка $(y'_x)'_x = y''_{xx} = \varphi'(x)$. И так можно вычислить производную любого порядка.

Примеры. 1. Найти производную второго порядка от функции $y = \sin^2 x$

$y'_x = 2\sin x \cos x = \sin 2x \qquad y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$;

2. Найти производную третьего порядка от функции. $y = \cos^2 x$

$y' = -2\sin x \cos x, \quad y' = -\sin 2x, \quad y'' = -2\cos 2x, \quad y''' = 4\sin 2x$

3. $S = \frac{t}{2}\sqrt{2-t^2} + \arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}$. Найти $\frac{d^2S}{dt^2}$

$$S'_t = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{2-t^2} - \frac{t\cdot 2t}{2\cdot 2\sqrt{2-t^2}} + \frac{1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}} = \sqrt{2-t^2}$$

$$S''_{tt} = \frac{d^2S}{dt^2} = 2\frac{1(-2t)}{2\sqrt{2-t^2}} = -\frac{2t}{\sqrt{2-t^2}};$$

4. $y = x^n$ найти производную n-го порядка

$y' = nx^{n-1}; \quad y'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ и т.д.

$$y^{(n)} = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

5. Найти частные производные третьего порядка от функции

$z = x^3 + x^2y + y^3 \quad z'_x = 3x^2 + 2xy, \; z''_x = 6x + 2y, \; z'''_x = 6$

$z'_y = x^2 + 3y^2, \; z''_y = 6y, \; z'''_y = 6, \; z''_{xy} = 2x, z_{xyx} = 2, \; z''_{xxy} = 2$

$z'_{yx} = 2x, \; z''_{yxx} = 2, \; z'''_{yxy} = 6$ и т.д.

6. Вычислим производную второго порядка от функции, заданной параметрически.

Для этого продифференцируем по "x" производную первого порядка от функции, заданной параметрически.

$$(y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{(y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t) \cdot t'_x}{(x'_t)^2} =$$

$$= \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Итак, $$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Пример. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ Вычислить производную второго порядка в точке $t = \frac{\pi}{4}$

$x'_t = -3\cos^2 t \sin t, \; x''_{tt} = -3\cos^2 t + 6\cos t \cdot \sin^2 t$

$y'_t = 3\sin^2 t \cos t, \; y''_{tt} = 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t$

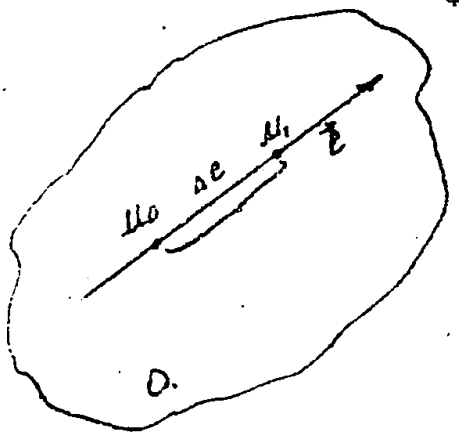
$$y''_{xx} = \frac{3\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t)(-3\cos^2 t \cdot \sin t) - 3\cos t(2\sin^2 t - \cos^2 t)3\sin^2 t \cos t}{-27\cos^6 t \cdot \sin^3 t} = \frac{9\sin^2 t \cos^2 t[-2\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin^2 t + \cos^2 t]}{-27\cos^6 t \sin^3 t}$$

$$= -\frac{[1-2]}{3\cos^4 t \sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t \cdot \sin t}.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Производная по направлению.

Пусть дана функция трех переменных $\varphi = f(x, y, z)$ и пусть ее область определения представляет некоторое множество точек пространства, которое обозначим через V.



Фиксируем в области V точку M_0. Через точку M_0 можно провести бесчисленное множество прямых (направлений). Выберем одно из этих направлений и обозначим его через $\vec{\ell}$. Пусть точка M_0 перемещается в точку M_1 вдоль направления $\vec{\ell}$, не выходя за пределы области V.

Найдем приращения функции φ.

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

Составим отношение приращения функции к расстоянию между точками M_0 и M_1 и найдем предел этого отношения при условии, когда точка $M_0 \to M_1$, который обозначим через $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}\right)_{M_0}$, т.е.

$$\lim_{M_0 \to M_1} \frac{\Delta\varphi}{|M_0 M_1|} = \lim_{M_0 \to M_1} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}\right)_{M_0}.$$

Вычисленный предел называется частной производной функции φ в направлении $\vec{e}$. Если направление $\vec{e}$ совпадает с осью OX, то частную производную в этом направлении будем обозначать через $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{M_0}$ или $\varphi'_x(M_0)$ и будем называть частной производной от функции φ по "x". АНалогично можно ввести частные производные от функции φ по аргументам "y" и "z" и обозначим их соответственно через

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{M_0} \quad \text{или} \quad \varphi'_y(M_0), \varphi'_z(M_0)$$

Получим правило для вычисления частных производных и производной по любому направлению.

Рассмотрим $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x}$

Отсюда следует правило отыскания частной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Для того, чтобы найти производную от функции $u = \varphi(x, y, z)$ по переменной "x" нужно принять переменные "y" и "z" постоянными, а "x" считать переменной и тогда данная функция

будет представлять собой функцию одного переменного, для которой уже применимы известные правила дифференцирования. Аналогично отыскиваются частные производные от функции φ по "x" и по "y". Например, пусть $u = x^3 + 3x^2yz + y^3$. Тогда $u'_x = 3x^2 + 3yz$, $u'_y = 3y^2 + 3xz$, $u'_z = 3xy$.

Получим достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных (аналогично тому, какое имеем для функции одного переменного $\Delta y = f'(x_0)\cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$).

Предположим, что приращение функции φ $\Delta\varphi$ можно представить в виде $\Delta\varphi = A\cdot\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \gamma_1\cdot\Delta x + \gamma_2\Delta y + \gamma_3\Delta z$, где A,B,C – некоторые числа, а γ_1, γ_2, γ_3 – бесконечно малые функции. Это, вообще говоря, можно сделать подбирая числа A,B,C и бесконечно малые γ_1, γ_2, γ_3, но связано это с большими трудностями.

Покажем, что числа A, B, C есть не что иное, как соответствующие частные производные от функции φ по "x", "y" и "z". В самом деле предположим, что у функции $u = \varphi(x, y, z)$ аргументы "y" и "z" – фиксированные, а "x" меняется. Тогда $\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = A\cdot\Delta x + \gamma_1\Delta x$

Вычислим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x + \gamma_1\cdot\Delta x}{\Delta x} = A$, т.е. $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A$.

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = B \quad и \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = C.$$

Тогда приращение функции $\Delta\varphi$ можно записать в виде

$$(*)\quad \Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\Delta z + \\ + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\cdot\Delta y + \gamma_3\Delta z.$$

Это и есть достаточное условие дифференцируемости функции трех переменных.

Итак, если функция $u = \varphi(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x, y, z)$, то ее приращение представимо в виде равенства $(*)$

Теперь получим формулу для вычисления производной от функции φ по направлению $\vec{e}$.

Пусть функция $u = \varphi(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда в этой точке имеет место равенство $(*)$

$$(\Delta\varphi)_{M_0} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_0}\Delta x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_0}\Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{M_0}\Delta z + \gamma,$$

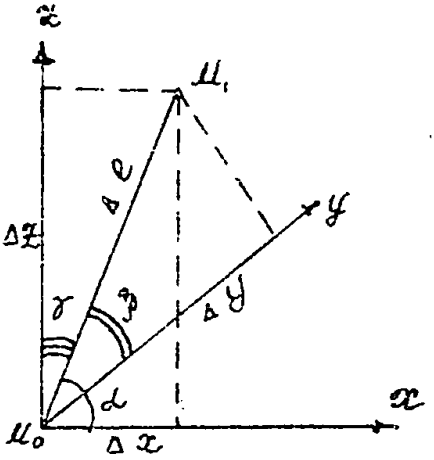
где $\gamma = \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y + \gamma_3\Delta z$ – бесконечно малая величина. Составим отношение

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta e}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_0}\frac{\Delta x}{\Delta e} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_0}\frac{\Delta y}{\Delta e} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{M_0}\frac{\Delta z}{\Delta e} + \frac{\gamma}{\Delta e} \quad (**)$$

Выясним из геометрических соображений значение

величин $\frac{\Delta x}{\Delta e}$; $\frac{\Delta y}{\Delta e}$; $\frac{\Delta z}{\Delta e}$. Для этого в область определения функции $u=\varphi(x,y,z)$ введем прямоугольную декартову систему координат.

Для простоты вычислений начало координат системы точку "о" перенесем в точку M_0. Направление $\vec{e}$ образует с осями координат углы α, β, γ.



Из чертежа видно, что $\frac{\Delta x}{\Delta e}=\cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta e}=\cos\beta$ и $\frac{\Delta z}{\Delta e}=\cos\gamma$

Представляя в равенстве (* * вместо $\frac{\Delta x}{\Delta e}$, $\frac{\Delta y}{\Delta e}$ и $\frac{\Delta z}{\Delta e}$ соответственно $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и переходя к пределу, будем иметь $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial e}\right)_{M_0}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_0}\cos\alpha+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_0}\cos\beta+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{M_0}\cos\gamma$.

Пример. Вычислить производную от функции

$$u=x^2+y^2+z^2$$

в M_0 (1,1,1) в направлении, составляющем с осями координат углы в 45°, 60°, и 60°.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(1,1,1)}=(2x)_{\substack{(1,1,1)\\M_0}}\cos45^\circ+(2y)_{\substack{(1,1,1)\\M_0}}\cos60^\circ+(2z)_{\substack{(1,1,1)\\M_0}}\cos60^\circ=2+\sqrt{2}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача. Дана функция $z=F(u,v)$, где $u=f(x,y)$, $v=\varphi(x,y)$. Тогда функция $z=F[f(x,y),\varphi(x,y)]$ является сложной функцией от переменных "x" и "y". Переменные

u и v называются промежуточными аргументами, "x" и "y" – основные переменные.

Пусть функция $z = F(u, v)$ дифференцируема по переменным u, v, а функции u и v дифференцируемы по переменным "x" и "y", т.е. существуют $F'_u, F'_v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$.

Тогда полное приращение функции $z = F(u, v)$ может быть представлено $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\Delta v + \alpha$, (1)

где α – б.м.в., более высокого порядка малости, чем Δx и Δy.

Для получения частной производной z'_x функции $z = f(u, v)$ разделим равенство (1) на "Δx" и вычислим предел полученного равенства при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x},$$

откуда по определению производной имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

аналогично для $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$.

Пример. Найти частные производные от функции $z = \frac{u^2}{v}$, где $u = x - 2y$, $v = y + 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{v} - \frac{u^2}{v^2}\cdot 2 = \frac{x^2 + xy - 6y^2}{(y+2x)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2u}{v}\cdot 2 - \frac{u^2}{v^2} = -\frac{4(x-2y)}{y+2x} - \frac{(x-2y)^2}{(y+2x)^2};$$

Замечание. Пусть дана функция $u = F(t, x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, т.е. u есть сложная функция от одного аргумента t:

$$u = F[t, x(t), y(t), z(t)]$$

Тогда производную от функции u по переменному t будем называть полной производной и обозначать $\frac{du}{dt}$.

На основании дифференцирования сложной функции полная производная будет равна:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Пример. Найти полную производную функции $z = arctg\frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot 2e^{2t} + \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot 2e^{2t} = \frac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1};$$

3. Дифференцирование векторной функции скалярного аргумента.

Пусть задана векторная функция скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Параметру t сообщаем приращение Δt. Тогда наращенное значение функции примет вид $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$;

Составим отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ и найдем предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Если такой предел существует, то он и будет называться производной от векторной функции $\vec{r}(t)$ по скалярному аргументу t, и будет обозначаться $\vec{r}'(t)$ или $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.

Как ранее было отмечено полное приращение дифференцируемой функции может быть представлено:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha$$

Так как α – величина бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с Δx и Δy, то полное приращение функции Δz будет главным образом зависеть от первых двух слагаемых.

Выражение $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ будем называть главной частью полного приращения функции.

Определение. Главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy, называется полным дифференциалом.

Обозначать полный дифференциал будем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \qquad (2)$$

Отсюда видно, что полное приращение функции отличается от полного дифференциала на величину α – бесконечно малую более высокого порядка малости, чем "Δx" и "Δy", т.е. $\Delta z = dz + \alpha$, отсюда $\Delta z \approx dz$ с точностью до α. Пусть $z = x + y$, вычислим полный дифференциал (2) этой функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$, тогда $dz = \Delta x + \Delta y$. Если $y = 0$, то $z = x$ и $\Delta y = 0$ и, следовательно, $dz = dx = \Delta x$. Аналогично, $\Delta y = dy$, т.е. приращение переменной равно ее дифференциалу. Тогда равенство (2) может быть записано в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (2')$$

Примеры. Если $z = f(x)$, т.е. имеем функцию одной переменной, тогда $y = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)$ и дифференциал такой функции равен:

$$dz = f'(x)dx \qquad (3)$$

Если функцию одной переменной обозначают $y = f(x)$, то ее дифференциал равен $dy = f'(x)dx$

Дифференциал функции одной переменной равен произведению ее производной на дифференциал ее аргумента.

Замечание: Для векторной функции скалярного аргумента дифференциал имеет вид: $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \cdot dt$.

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

1. Дифференциал алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме дифференциалов каждого слагаемого.

$$z = u \pm v \pm \cdots \pm w; \quad dz = du \pm dv \pm \cdots \pm dw$$

Это легко проверить, учитывая, что производная алгебраической суммы конечного числа слагаемых равна алгебраической сумме производных каждой функции.

2. Дифференциал произведения двух функций равен:

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

В самом деле: $(u \cdot v)' = uv' + vu'$; умножим обе части этого равенства на dx - получим:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

3. Дифференциал частного двух функций равен:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

Доказательство аналогично пункту 2.

4. Свойства инвариантности.

Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ - непрерывные функции своих аргументов, имеющие производные по этим аргументам $f'(u)$ и $\varphi'(x)$.

Если обозначить $F(x) = f[\varphi(x)]$, то $F(x)$ – сложная функция аргумента "x", дифференцируя которую будем иметь: $y' = F'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

Умножая обе части этого равенства на dx , получим:

$$y'dx = f'(u) \cdot \varphi'(x)dx \; ; \quad dy = f'(u)du,$$

т.е. dy имеет такой же вид , как если бы величина u была независимой переменной.

Вывод. Дифференциал функции $y = f(u)$ сохраняет одно и тоже выражение независимо от того, является ли аргумент u независимой переменной или функцией.

Примеры. I. Подставить выражения в скобках:

1. $d(\quad) = 2xdx$

2. $d(\quad) = \cos x\,dx$

3. $d(\quad) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

4. $d(\quad) = x^3 dx$

5. $d(\quad) = \dfrac{dx}{x}$

6. $d(\quad) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

II. В задачах 1–7 выполнить тождественные преобразования, применяя операцию подведения под знак дифференциала:

1. $\sin x \cos x dx = \sin x d(\sin x)$

2. $tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg^3 x \, d(tg x)$

3. $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$

4. $(x+1)^{15} dx = (x+1)^{15} d(x+1)$

5. $x\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\, d(1-x^2)$

6. $\frac{(arctg x^2) dx}{1+x^2} = (arctg x)^2 \frac{dx}{1+x^2} =$
$= (arctg x)^2 d(arctg x)$

7. $\cos 3x dx = \frac{1}{3}\cos(3x) d(3x)$

§8. ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ.

В этом параграфе рассмотрим теорему о корнях производной (теорему Ролля), теорему об отношении приращений двух функций (теорему Коши), формулу Тейлора и приложение вышеназванных теорем.

Теорема Ролля.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах "x = a" и "x = b" обращается в нуль или $[f(a) = f(b)]$, то существует внутри

отрезка $[a,b]$ по крайней мере одна точка "x=c," $a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение "M" и наименьшее значение "m".

Если "M= m ", то $f(x)$ постоянная на отрезке $[a , b]$. Но тогда в любой точке отрезка $[a, b]$ $f'(x)=0$ и теорема доказана.

Пусть "M" $\neq m$ и предположим для определенности, что $M > 0$ и что функция принимает своё наибольшее значение при x= c, т.е. $f(c)=M$ ($a < c < b$, т.е. c не равно ни a, ни b).

Тогда $f(c+\Delta c) - f(c) \leq 0$ (т.к. $f(c)$ - наибольшее значение на $[a, b]$ и $\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x < 0$, $\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x >$

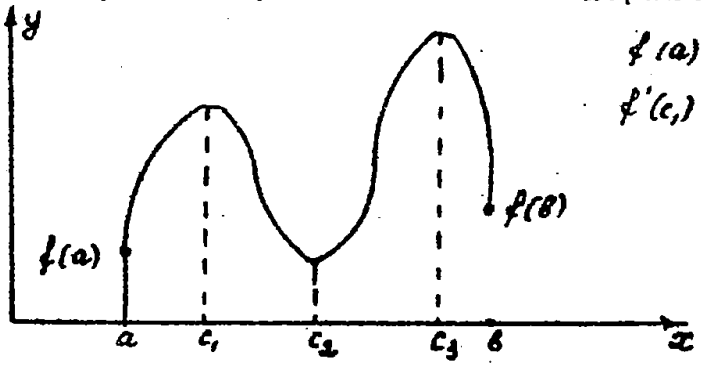
Так как по условию теоремы производная при "x=c" существует, то переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0$ при $\Delta x > 0$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0$ при $\Delta x < 0$

Но соотношения $f'(c) \leq 0$ и $f'(c) \geq 0$ совместны лишь в том случае, если $f'(c) = 0$ Следовательно,

на отрезке [а, в] имеется точка "с", в которой производная $f'(c)=0$. Доказанная теорема остается справедливой и для дифференцируемой функции, которая на концах отрезка [а, в] не обращается в нуль, но принимает разные значения $f(a)=f(B)$.

Теорема Ролля имеет простое геометрическое толкование: если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось ОХ в точках с абсциссами "а" и "в", то на этой кривой найдется по крайней мере одна точка с абсциссой "х = с", в которой касательная параллельна оси ОХ.



$f(a)=f(B)$

$f'(c_1)=f'(c_2)=f'(c_3)=0$

Теорема Коши.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – две функции, непрерывные на [а, в] и дифференцируемые внутри него, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка [а, в] найдется такая точка "х = с" (а<С<в), что $\frac{f(B)-f(a)}{\varphi(B)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

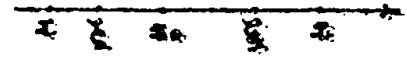
Доказательство этой теоремы рассматривать не будем.

Формула Тейлора.

Эта формула позволяет при определенных условиях выразить любую функцию $f(x)$ через степенные. В образовании степенных функций участвуют операции сложения, вычитания, умножения, деления, которые в конечном итоге выражаются через операцию сложения. Преимущество степенных функций перед остальными состоит в том, что над ними очень легко производить математические и вычислительные операции, что в свою очередь позволяет легко эти операции программировать на ЭВМ. Формула Тейлора, кроме того, используется при математических доказательствах.
Поэтому возникает задача: выразить функцию $f(x)$ с помощью степенных функций. (Сформулируем эту задачу математически и ее решаем.)

Задача. Пусть дана функция $f(x)$, которая дифференцируема $(n+1)$ раз в точке "$x = x_0$" и ее окрестности, т.е. существуют

$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots f^{n}(x_0), f^{n+1}(\xi)$



ξ точка между "x и x_0"

Требуется представить функцию $f(x)$ в виде суммы степенных функций с определенной точностью.

Решение.

Исходя из условия задачи, с помощью чисел $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0) \dots f^n(x_0)$ составим так называемый многочлен Тейлора

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Выясним, как связаны между собой $f(x)$ и $T_n(x)$. Для этого вычислим значения функции $f(x)$ и многочлена $T_n(x)$ в точке "$x = x_0$". Получим $f(x_0) = T_n(x_0)$. Также вычислим все производные до "n-го" порядка включительно от функции $f(x)$ и многочлена $T_n(x)$. "

$$T_n'(x) = f'(x) + \frac{2f''(x_0)(x-x_0)}{2!} + \frac{3f'''(x_0)(x-x_0)^2}{3!} + \dots$$

представляя вместо "$x = x_0$," получим $T_n'(x_0) = f'(x_0)$ Вычисляя анапогично, получим $T_n''(x_0) = f''(x_0)$ и т.д. $T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ Следовательно, значение многочлена Тейлора и его производных до "n-го" порядка включительно совпадает со значением и производными от функции $f(x)$.

Возникает вопрос, можно ли поставить знак равенства между $f(x)$ и $T_n(x)$. Легко показать, что если $f(x)$ многочлен степени n, то имеет место равенство $f(x) = T_n(x)$.

Если $f(x)$ не многочлен, то функция $f(x)$ отличается от многочлена $T_n(x)$ на некоторую функцию $R_n(x)$, т.е. имеет место равенство $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$

функция $R_n(x)$ называется остаточным членом (или погрешностью.) Тогда $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ или эту формулу можно записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Остаточный член $R_n(x)$ записывают обычно в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

ξ – точка, находящаяся между "x" и "x_0"

Частным случаем формулы Тейлора является формула Лагранжа $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-x_0)$,

в которой остаточный член $R_n(x) = f'(\xi)(x-x_0)$.

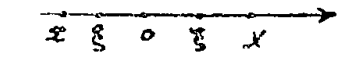
Чаще всего формулу Лагранжа используют в следующем виде $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$

Пример. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенство $\frac{a-b}{a} \le \ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}$ при условии, что $0 < b < a$.

Если точка "$x_0 = 0$", то формула Тейлора называется формулой Маклорена.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

точке ξ находится между "x" и "0"



Разложение функций $\sin x$, $\cos x$, e^x по формуле Тейлора.

Пусть дана функция $f(x)=\sin x$. Требуется записать для этой функции формулу Маклорена.

Для этого от данной функции найдем производные до $(n+1)$ порядка включительно и вычислим значение функции и ее производных в точке $x_0=0$.

$$f(0)=0 \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) \qquad f'''(0)=-1$$

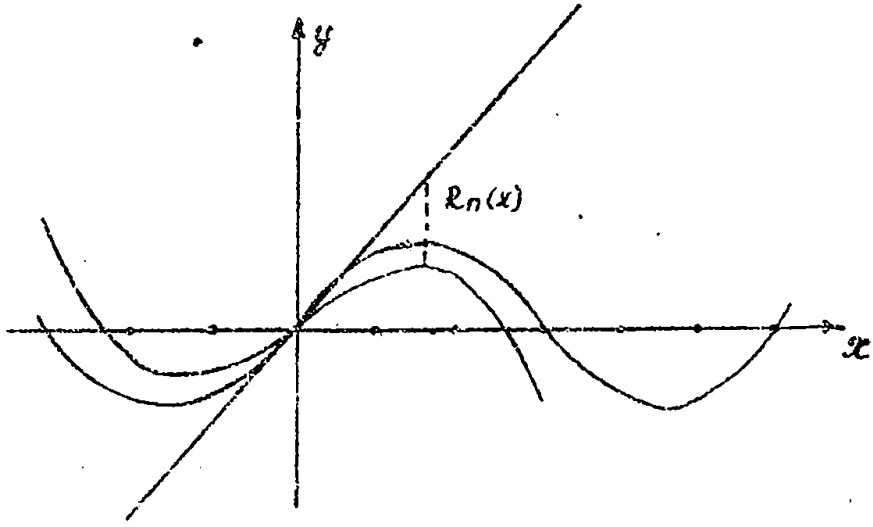
$$f^{IV}(x)=\sin x=\sin(x+2\frac{\pi}{2}) \qquad f^{IV}(0)=0$$

$$f^{V}(x)=\cos x=\sin(x+5\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad f^{V}(0)=1$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left[x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right] \qquad f^{n}(0)=\sin n\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left[x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right] \qquad f^{(n+1)}(\xi)=\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n+\frac{\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}$$



$y = x \quad y = x - \frac{x^3}{3!} \quad y = x - \frac{x^3}{6}$

$y = 0 \quad x = 0 \quad x^2 = 6 \quad x_{1,2} = \pm 2{,}4$

$y' = 1 - \frac{3x^2}{6} \quad y' = 0 \quad 3x^2 = 6 \quad x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \approx 1{,}4$

С помощью формулы Тейлора вычислить $\sin 18°$ с точностью $\alpha = 0{,}001 \quad 1° \sim 0{,}0175$

$$\sin 18° = 18° - \frac{(18°)^3}{3!} + \frac{(18°)^5}{5!} + \ldots$$

или в радианах $\sin 0{,}314 = 0{,}314 - \frac{(0{,}314)^3}{3!} + \frac{(0{,}314)^5}{5!} \ldots$

Нужно узнать, сколько взять слагаемых, чтобы вычислить $\sin 18°$ с заданной точностью.

Этот вопрос можно решить путем оценки остаточного члена. Для этого нужно решить неравенство относительно n.

$$R_n(x) = \left| \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0{,}001$$

$$R_n(x) \le \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0{,}001$$

$$R_n(x) \le \frac{(0{,}32)^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001 \qquad n = 3$$

$$\frac{(0{,}32)^4}{4!} = \frac{0{,}0024}{24} = 0{,}0003 < 0{,}001, \qquad \sin 0{,}314 = 0{,}314 - \frac{(0{,}314)^3}{3!}$$

Решается это неравенство путем подбора n.

$f(x) = \cos(x)$ разложить по формуле Тейлора самостоятельно.

Аналогично можно получить формулу Маклорена для $f(x) = e^x$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Правила Лопиталя.

С помощью теоремы Коши можно получить правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и к ним приводящиеся $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$ и т.д.

Правило. 1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль при "$x = a$", т.е. $f(a) = \varphi(a) = 0$ тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при "$x \to a$", то существует и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

Доказательство этого правила.

Возьмем на отрезке $[a, b]$ точку $x \neq a$.

Применяя теорему Коши, можно записать

$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, точка ξ лежит между x и a.

Но по условию $f(a) = \varphi(a) = 0$. Следовательно, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. Если $x \to a$, то и $\xi \to a$, так как ξ заключено между "a и x." Поэтому $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A$. Следовательно

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

Доказанное выше правило используется для раскрытия неопределенности "$\frac{0}{0}$".

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{1} = 3$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

Аналогично можно доказать второе правило для раскрытия неопределенности "$\frac{\infty}{\infty}$"

Правило 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех "x ≠ a" в окрестности точки "a", причем, производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль и пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$$

и существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Это правило "справедливо" и при "$x \to \infty$."

Пример:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x-1} =$$

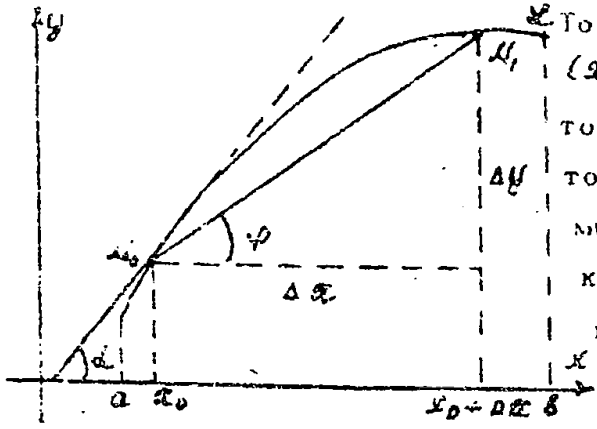
$$= \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1} \frac{-2\cos\frac{\pi}{2}x \cdot \sin\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{\pi}{2}}{1} = 0$$

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

1. Геометрический смысл первой производной.

Прежде чем рассматривать геометрические приложения производных и дифференциалов, выясним геометрический смысл производных от функций $y = f(x)$

Пусть дана дифференцируемая на отрезке [a, в] функция $y = f(x)$. Тогда график этой функции будет представлять собой некоторую кривую $\mathcal{L}$. На линии $\mathcal{L}$ возьмем некоторую точку M_0, в которой сообщим приращение абсциссе "x" – " Δx".



Тогда получим точку M_1 ($(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$? Пусть точка $M_0 \to M_1$, т.е. $\Delta x \to 0$, тогда секущая M_0M_1 стремится занять положение касательной прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0, а угол $\varphi \to \alpha$

Тогда $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$= \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = tg\alpha$

Из чертежа $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Итак, $y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = tg\alpha$

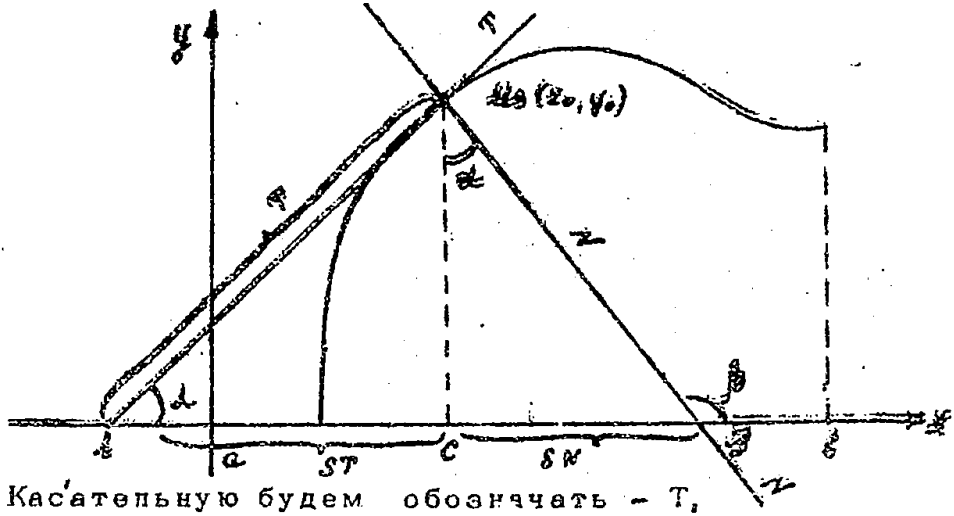
Производная от функции в данной точке есть угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точ-

ке M_0. Получим уравнение касательной.

Будем искать уравнение касательной в виде $y = kx + b$" "y = kx + в," где "к" – тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси "OX", а "в" – отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат. Тогда угловой коэффициент касательной будет равен "к= $f'(x_0)$". Найдем параметр "в". Для этого в уравнение "y=kx+в" подставим координаты точки M_0 (x_0, y_0). Получим "в" = $y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$" Подставляя найденные числа "а" и "в" в исходное уравнение получим $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной прямой.

Аналогично можно получить уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Нормалью к кривой называется прямая перпендикулярная к касательной в точке касания M_0.



Касательную будем обозначать – T,

Нормаль – N

Уравнение нормали "y = kx + b". Определим параметры "k" и "b". Угол $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$; $tg\beta = tg(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -ctg\alpha$

$$K_N = tg\beta = -ctg\alpha = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Тогда $y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + b$ $b = ?$ $y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}x_0 + b$ $b = y_0 + \frac{1}{f'(x_0)}x_0$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$ -уравнение нормали.

Введем обозначения:

AM_0 – длина касательной и обозначается через T,

AC – длина подкасательной и обозначается через ST,

M_0B – длина нормали и обозначается чег через N,

CB – длина поднормали и обозначается через SN,

Найдем ST, SN, T, N. Решая прямоугольные треугольники, получим:

$$S_T = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \qquad (1)$$

$$S_N = \left|f(x_0) \cdot f'(x_0)\right| \qquad (2)$$

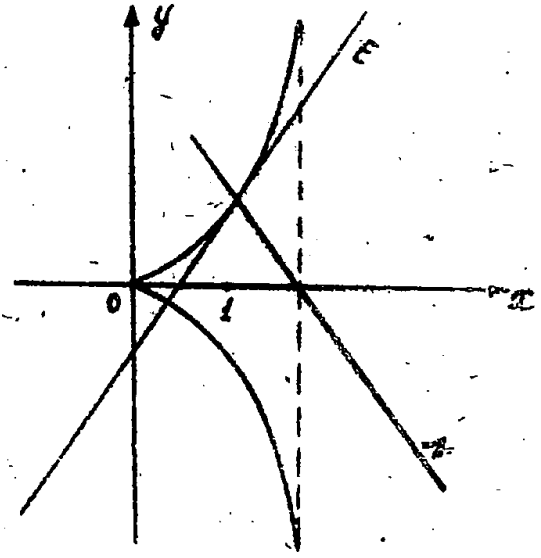
$$T = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}\right| \qquad (3)$$

$$N = \left|f(x_0)\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}\right| \qquad (4)$$

Пример. Дана неявная функция $y^2=x^3$. Составить уравнения касательной и нормали к графику данной функции в точке "x=1," и найти в этой же точке T, N, Sn, Sn.

Решение. Преобразуем уравнение $y^2 = x^3$ к виду $y=\pm x\sqrt{x}$.

Построим график данной функции.



Для написания уравнения касательной вычислим первую производную данной функции в точке "$x_0=1$," "$y_0 = 1$,", $2yy' = 3x^2$ $y' = \frac{3x^2}{2y} = \frac{3}{2}$ и подставим ее в уравнение касательной, вычислим

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Тогда получим уравнение касательной.

$$y - 1 = 1{,}5\,(x - 1)$$
$$y = 1{,}5x + 1 - 1{,}5$$
$$y = 1{,}5x - 0{,}5$$

Зная уравнение касательной, легко получить уравнение нормали: $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1)$

Пользуясь формулами (1–4), получим:

$$S_T = 1 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}6 \qquad T = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$S_N = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad N = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

П.2. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ.

Дифференциальное исчисление функций одного и нескольких переменных широко используется для исследования этих функций.

ПРИЗНАКИ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ.

Теорема 1. Для того, чтобы дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция не убывала, необходимо и достаточно, чтобы производная от этой функции была неотрицательная, т.е.

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает для $x \in [a, b]$, т.е. $\forall x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ из условия $x_1 < x_2$ вытекает $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Нужно доказать, что $f'(x) \geq 0$

Найдем $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$ так как и при

$\Delta x > 0$ $f(x+\Delta x)-f(x) \geq 0$ и при $\Delta x < 0$

$f(x+\Delta x)-f(x) \leq 0$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$. Нужно доказать, что $f(x_1) \leq f(x_2)$

Возьмем любые "x_1", $x_2 \in [a, b]$ и пусть $x_2 > x_1$

Тогда по теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Откуда следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$ что и требовалось доказать. Аналогично можно сформули-

ровать необходимое и достаточное условие для убывания функции.

Теорема 2. Для того, чтобы дифференцируемая на отрезке [a, в] функция не возрастала необходимо и достаточно ; чтобы $f'(x) \leq 0$ для $x \in [a, b]$

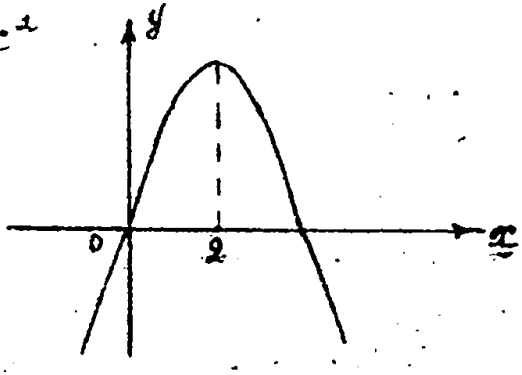
Следствие. Для того , чтобы функция $f(x)$ была постоянной на отрезке [a, в] необходимо и достаточно , чтобы производная от нее равнялась 0, т.е. $f'(x) = 0$.

Итак, для того, чтобы найти интервал возрастания, постоянства и убывания нужно решить соответственно неравенства и уравнение

$f'(x) > 0, \quad f'(x) = 0, \quad f'(x) < 0$

Пример. Найти интервал монотонности функции:

$y = 4x - x^2$



Решение. $x < 2$

Найдем интервал возрастания $y' = 4 - 2x, \; y'_x > 0, \; 4 - 2x > 0$

Интервал возрастания для данной функции будет множество $E_в = (-\infty, 2)$

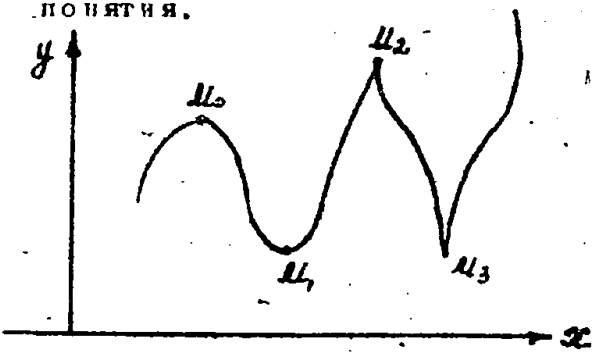
Интервал убывания - $E_y = (2, \infty)$

п.3. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

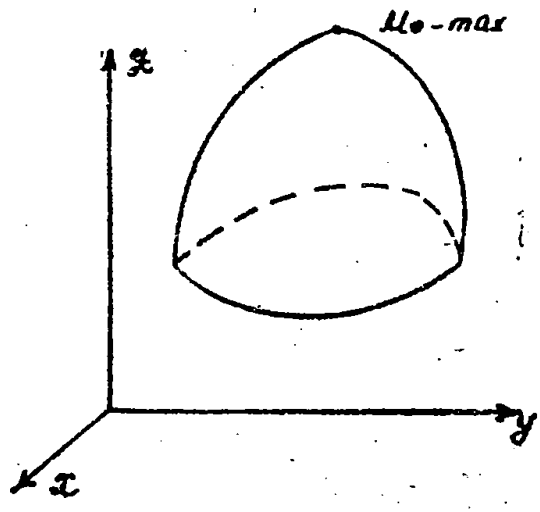
Понятие экстремума функции в точке.

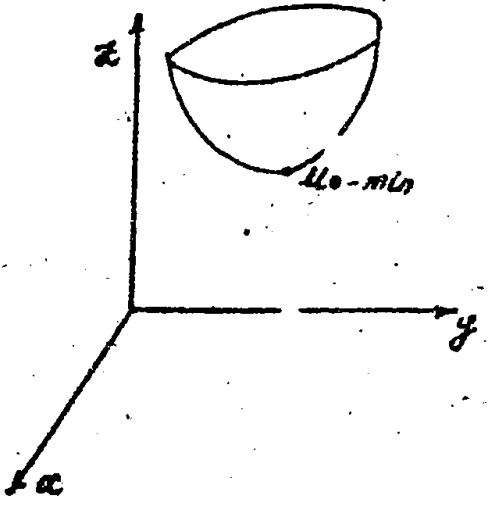
Определение. Точка M_0 называется точкой максимума (минимума) функции $u = f(M)$, если $f(M_0) > f(M)$ $[f(M_0) < f(M)]$ для $\forall M \in U(M_0)$

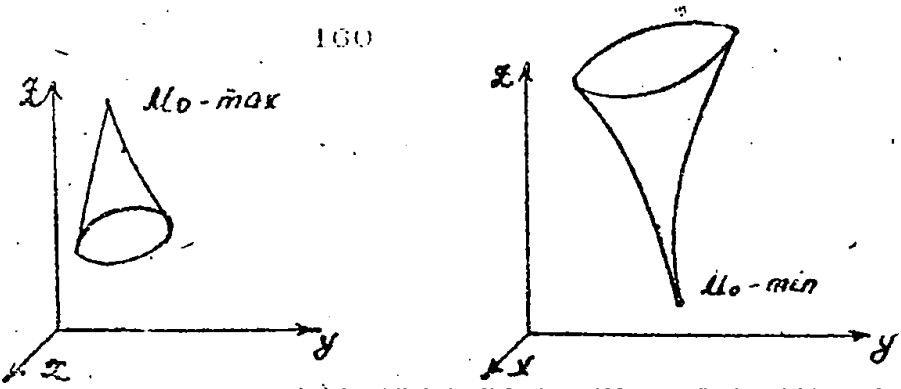
Геометрическая иллюстрация приведенного выше понятия.



Точки M_0, M_2 - точки максимума, M_1, M_3 - точки минимума.







Точки максимума и минимума называются точками экстремума или просто экстремумами, которые являются характерными точками при исследовании функций и построении их графиков.

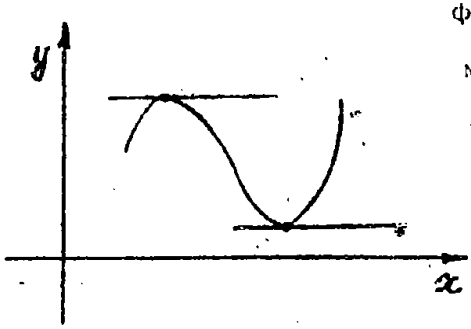
Рассмотрим методику отыскания точек экстремума.

Необходимый признак экстремума для функции одного переменного.

Функция $f(x)$ может иметь экстремумы только в тех точках, в которых ее производная либо равна нулю, либо не существует.

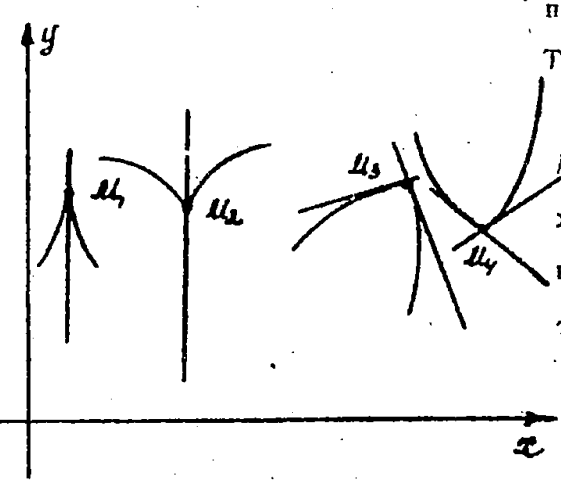
Если в точке "x_0" функция достигает экстремума, то согласно определению значение функции в этой точке является наибольшим в окрестности точки "x_0". Тогда согласно теоремы Ролля в тех внутренних точках интервала, в которых дифференцируемая функция достигает наибольшего значения, производная ее равна нулю. Аналогично можно провести рассуждения и для точки минимума.

С геометрической точки зрения рассматриваемый признак означает, что касательная к графику функции в его вершине параллельна оси OX.



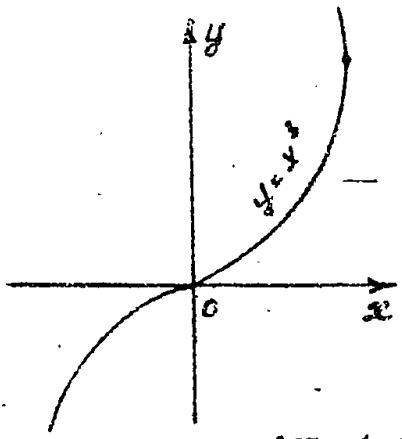
Функция может иметь экстремумы и в тех точках в которых она не дифференцируема. Эти случаи изображены на рисунке.

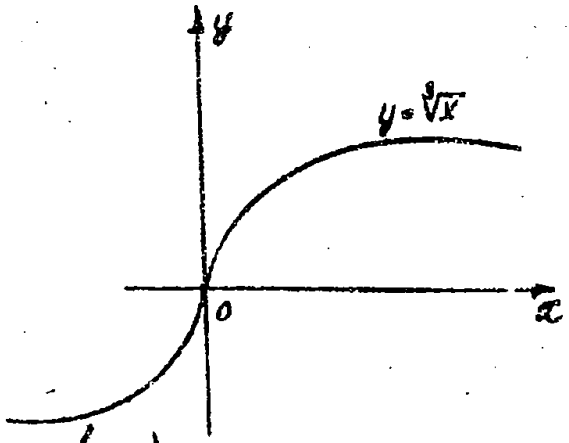
В точках M_1 и M_2 график функции имеет касательную, перпендикулярную к оси OX. Такие точки будем называть точками возврата. В точках M_3 и M_4 касательная переходит внезапно от одного наклона к другому, т.е. в этих точках график не имеет определенной касательной. Такие точки будем называть угловыми точками.



Сформулированный выше признак является необходимым, но не достаточным т.е. из того, что производная в данной точке обращается в нуль /или не существует/ не следует, что эта точка обязательно будет точкой экстремума.

Так, например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, обращающуюся в нуль при $x=0$ /как это видно из чертежа/ не являющуюся точкой экстремума.





Функция $y = \sqrt[3]{x}$ $\left(y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$ не имеет производной при "x = 0", которая также)(как это видно из чертежа) не является экстремальной.

Для того, чтобы установить , когда данная точка будет являться точкой экстремума, используются первый и второй достаточные признаки.

ПЕРВЫЙ ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ЭКСТРЕМУМА.

Точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ при переходе "x" через точку x_0 меняет знак, при перемене знака "+" на "–" точка x_0 является точкой максимума; при перемене "–" на "+" точка x_0 является точкой минимума. В самой точке x_0 производная в силу необходимого признака равна нулю или не существует.

Доказательство. Пусть при переходе "x" через "x_0" производная меняет знак с "+" на "–", это значит, что слева от "x_0" находится интервал возрастания, а справа– интервал убывания. Следовательно,

точка "x_0" есть точка максимума.
Аналогичные рассуждения можно провести для точки минимума.

ВТОРОЙ ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ЭКСТРЕМУМА.

С помощью второй производной $f''(x)$ можно установить второй достаточный признак экстремума, который иногда оказывается более удобным и простым, чем первый.

Точка "x_0" есть точка экстремума функции $f(x)$, если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, причем, если $f''(x_0)>0$, то "x_0" – точка минимума, а если $f''(x_0)<0$, то "x_0" – точка максимума.

Доказательство. Пусть $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$
Предполагая вторую производную непрерывной можно считать, что она сохраняет знак в некоторой окрестности точки "x_0". Отсюда следует, что функция $f'(x)$ в этой окрестности будет возрастающей, так как ее производная $f''(x)>0$
Из того, что $f'(x_0)=0$ следует, что слева от точки "x_0" $f'(x)<0$, а справа от точки "x_0" $f'(x)>0$
Итак, функция $f'(x)$ при переходе "x" через точку "x_0" меняет знак с "–" на "+", т.е. согласно первому достаточному признаку точка "x_0" есть точка минимума. Аналогично рассуждая, получим что,

если $f''(x_0) < 0$, то "x_0" есть точка максимума.

Пример. Найти экстремум и построить график функций а) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

Решение.

а) 1. Отыскивается область определения данной функции $E = (-\infty, \infty)$

2. Вычисляется производная $y'_x = x^2 - 2x - 3$

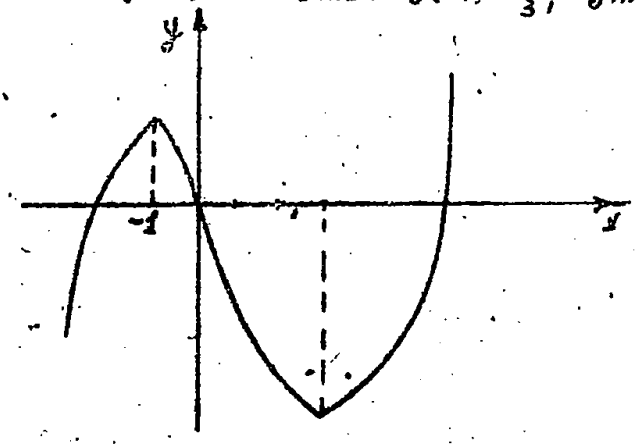
Согласно необходимому признаку, найденную первую производную приравниваем к нулю, т.е.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x_1 = -1; \quad x_2 = 3$$

Точки, где первая производная равна нулю или не существует, называются критическими или "подозрительными" на экстремум.

3. Устанавливается характер критических точек с помощью первого или второго достаточных признаков.

В данном примере используем второй достаточный признак: $y''(3) > 0$, $y''(-1) < 0$ Следовательно, "$x_1 = -1$" есть точка максимума, а "$x = 3$" – есть точка минимума. $y_{max} = y(-1) = \frac{5}{3}$, $y_{min} = y(3) = -9$



б) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

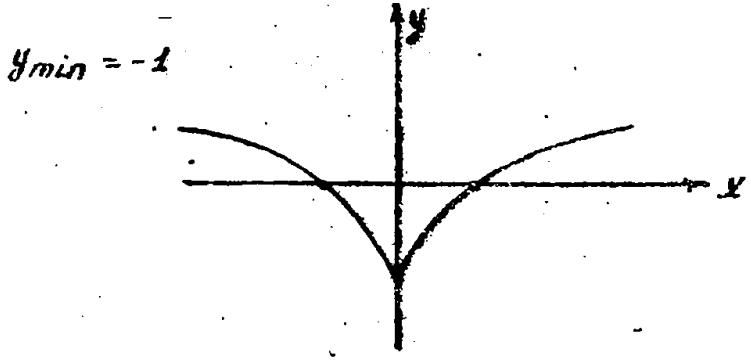
1) $E = (-\infty, \infty)$

2) $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

в точке "$x_0 = 0$" производная не существует, следовательно, эта точка есть критическая точка. Для установления характера этой точки воспользуемся первым достаточным признаком экстремума

$$y'(0-\varepsilon) < 0, \quad y'(0+\varepsilon) > 0$$

Следовательно, точка "$x_0 = 0$" есть точка минимума.



8.4. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируемая при "$x = x_0$" и "$y = y_0$" и достигает в ней экстремума, то в этой точке ее частные производные первого порядка равны нулю:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0$$

Доказательство. Допустим, что функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0\ (x_0, y_0)$ имеет экстремум. Согласно определению экстремума при постоянном "$y = y_0$", как функция одного переменного "x", достигает экстремума при "$x = x_0$"

Как известно необходимым условием этого является обращение в нуль производной от функции $f(x, y_0)$ при "$x = x_0$," т.е. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0$

Аналогично функция $z = f(x, y)$ при постоянном "$x = x_0$", как функция одного "y," достигает экстремума при "$y = y_0$,." Значит, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0$,

что и требовалось доказать.

Доказанное условие не является достаточным. Например, у функции "$z = xy$" частные производные равны нулю при "$x = 0$" и "$y = 0$," хотя в этой точке функция экстремума не достигает.

В самом деле, эта функция будучи равной нулю в начале координат, имеет в любой близости к началу координат как положительные значения (в первом и третьем координатных углах), так и отрицательные)(во втором и четвертом координатных углах)

и значит нуль не является ни наибольшим, ни наименьшим значением функции $z = xy$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0)$$

для критической точки $M_0(x_0, y_0)$ примет вид $z = z_0$, т.е. необходимое условие экстремума дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ выражается геометрически в том, что касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости независимых переменных.

Аналогично формулируется необходимое условие экстремума для функции большего числа переменных.

п.5. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ (без доказательства).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ есть критическая точка функции $z = f(x,y)$. Вычислим в этой точке значения вторых частных производных функции $z = f(x,y)$ и обозначим их для краткости A, B, C.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

Если $B^2 - AC < 0$, то функция $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум при $A < 0$ (и $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (и $C > 0$).

Если $B^2 - AC > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума.

Если $B^2 - AC = 0$, то никакого заключения о характере критической точки сделать нельзя и требуется дополнительное исследование, в частности непосредственно можно воспользоваться определением экстремума функции в точке.

Пример.

Найти экстремумы функции $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

Найдем область определения данной функции:

$x \in (-\infty, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$

$z'_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2) + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+2)$

$z'_y = e^{\frac{x}{2}} 2y$

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+2) = 0 \\ e^{\frac{x}{2}} 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y^2+2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$y = 0$
$x = -2$

$M_0(-2,0)$ – критическая точка

$$A = \left[\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)\right]_{(-2,0)} = 2e > 0$$

$$B = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)_{(-2,0)} = 0$$

$$C = (2e^{\frac{x}{2}})(-2,0) = \frac{2}{e} > 0$$

$$B^2 - AC = 0 - e^{-2} < 0$$

M_0 (-2,0) - точка минимума.

п.6. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ.

Пусть дана функция $u = f(x, x_2 \cdots x_n)$ непрерывная в замкнутой области "Д" (следовательно, существует ее наибольшее и наименьшее значение в этой области).

Требуется найти ее наибольшее "М" (наименьшее "m") значение.

Решение.

Пусть для определенности требуется найти наибольшее значение "М" по следующей методике:

1. Сначала нужно найти точки экстремума и среди них выбрать максимумы.

2. Вычислить максимальные значения функции u в найденных точках экстремума $u_1 max; u_2 max \cdots u_k max$

3. Среди вычисленных максимальных $u_1 max; u_2 max; \ldots u_k max$ выбрать наибольшее, т.е.

$$u max (наиб.) = max\{u_1 max, u_2 max \cdots u_k max\}$$

4. Затем нужно вычислить значение данной функции на границе, т.е. найти $u_{гран}$.

5. Наконец, за "M" принимается наибольшее из значений U_{max} (наиб) и $U_{гран.}$, т.е.

$$M = max\{U_{max}(наиб) \text{ и } U_{гран.}\}$$

Аналогично отыскивается наименьшее значение функции.

Замечание. Если область "Д" незамкнутая, то за наибольшее значение $M = max\{U_{1max}, U_{2max} \cdots U_{kmax}\}$

Пример. 1. Найти "M" и "m" функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на $[-2; +2]$

Решение. $y'_x = 4x^3 - 4x$; $4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$

$y''_x = 12x^2 - 4$ $y''(0) = -4 < 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$

$x_1 = 0$ - точка максимума

$x_{1,2} < 0$ $x_{2,3} = \pm 1$ - точки минимума

$x_{1,2} > 0$ $y_{min}(\pm 1) = 1 - 2 + 5 = \frac{16 - 24 + 45}{9} = 4$

$y_{max}(0) = 5$

$y_{гран}(-2) = 16 - 8 + 5 = 13$ $y_{гран}(+2) = 13$

$M = 13$ $m = 4$

2. Найти "M" и "m" функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$

Решение.

$z'_x = 2x \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

$z'_y = -2y$

$M_0(0,0)$ - критическая точка

$z''_{xx} = 2 = A$

$z''_{xy} = 0 = B$

$z''_{yy} = -2 = C$

$B^2 - AC = 0 + 4 > 0$, т.е.

в точке M_0 (0,0) экстремума нет.

Вычислим значения функции z на границе области $x^2 + y^2 = 4$

$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, тогда $z = 2x^2 - y$.

$z'_x = 4x$, $4x = 0$, $x = 0$, $y = \pm 2$

$M_1(0, -2)$, $M_2(0, 2)$

$z_{гр}(0, -2) = -4$ $z_{гр}(0, 2) = -4$

$z_{гр}(2, 0) = 4$ $z_{гр}(-2, 0) = 4$

Следовательно, $m = -4$, $M = 4$

Пример 3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32 м^3$, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение.

При решении задач на отыскание наибольшего (наименьшего) значения рекомендуется придерживаться следующей методики:

1. Установить искомую функцию.

2. Выбрать независимую переменную и установить ее область изменения.

3. Остальные переменные выразить через выбранные независимые переменные.

4. Выразить искомую функцию через независимые переменные.

5. Решить задачу об отыскании наибольшего (наименьшего) значения искомой функции.

1. В данной задаче искомой функцией является сумма боковой поверхности и площади основания, т.е. $S = S_{бок} + S_{осн}$.

2. За независимую переменную x примем сторону основания,. Исходя из условия задачи $x \in (0, \infty)$

3. $S = 4x \cdot h + x^2, \quad h = \frac{V}{x^2}, \quad S = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2$

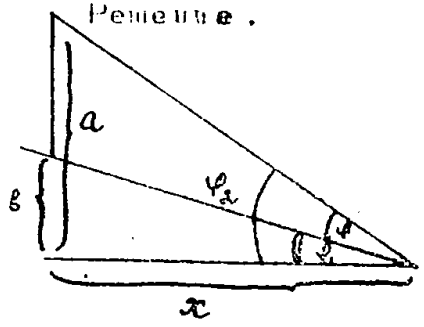
4. $S'_x = 2x - \frac{128}{x^2} \qquad 2x^3 = 128 \qquad x_1 = 4$

$S''_x = 2 + \frac{128 \cdot 2}{x^3} \qquad S''(4) > 0$

Следовательно, при "x = 4" $S(4) = 48$ наименьшее значение. Тогда искомые размеры бассейна будут 4 x 4 x 2.

Пример. 4. Картина повешена на стене. Нижний ее конец на "в" см., а верхний на "а" см. выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

Решение.



1. Искомой функцией является угол φ.

2. За независимую переменную примем расстояние x $(x \in (0, \infty))$

3. $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ $\quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{a}{x}$

$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{b}{x}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x}$

4. $\varphi'_x = \frac{(b-a)(x^2-ab)}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}$ $\quad \varphi'_x = 0$ $\quad (b-a)(x^2-ab)=0$

$b \neq a$ $\quad x = \sqrt{ab}$

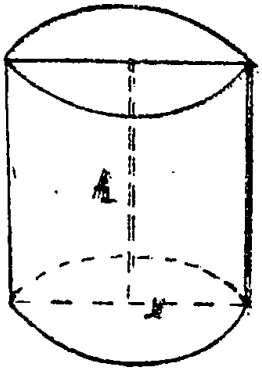
$\varphi'(\sqrt{ab}-\varepsilon) > 0$ $\quad \varphi'(\sqrt{ab}+\varepsilon) < 0$

(т. к. по условию $x \in (0, \infty)$)

Следовательно, при $x = \sqrt{ab}$ функция $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x}$ имеет максимум.

Пример 5. Определить размеры цилиндра наибольшего объема при условии, что полная поверхность равна "6π" дм^2

Решение.



Искомая функция – объем цилиндра. За независимую переменную примем радиус основания цилиндра "x", h – высота цилиндра.

$x \in (0, \infty)$

$V = \pi x^2 h$ $\quad 6\pi = 2\pi x \cdot h + 2\pi x^2$

$h = \frac{3-x^2}{x}$

$$V = \frac{\pi}{x} \cdot x^2(3 - x^2) = \pi x(3 - x^2) = 3\pi x - \pi x^3$$

$$V'_x = 3\pi - 3\pi x^2 \qquad V'_x = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 1$$

$$x = 1 \qquad h = 2$$

$$V''_{xx} = -6\pi x$$

$$V''_{xx}(1) < 0$$

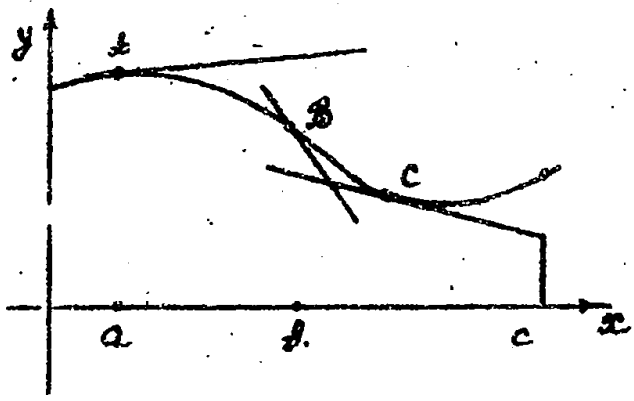
Следовательно, при "x = 1", $h = 2$ объем цилиндра будет наибольшим.

п.7. ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ.

Определение. График функции $y = f(x)$ вогнутый (выпуклый) на интервале (a, в), если все точки графика лежат выше (ниже) касательной, проведенной в любой точке графика на этом интервале.

Точки, определяющие интервал выпуклости от вогнутости, называются точками перегиба.

В точке перегиба касательная пересекает график функции.

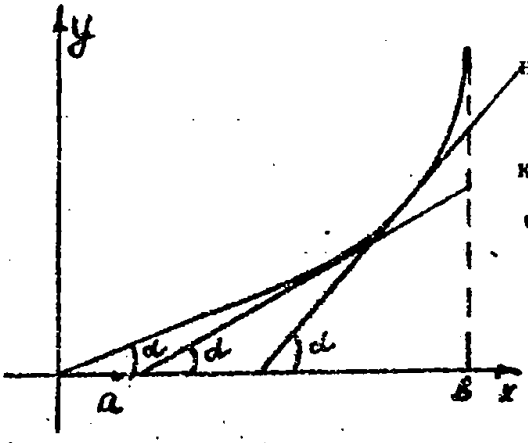


Рассмотрим методику отыскания интервалов вогнутости и выпуклости.

п.9. Признаки вогнутости и выпуклости графика функции.

Теорема 1. Для того, чтобы график функции $f(x)$ был вогнутый (выпуклый) на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы вторая производная от функции $f(x)$ была положительная, т.е. $f''(x) > 0$ (отрицательная $f''(x) < 0$)

Необходимость. Пусть график $f(x)$ вогнут на (a, b), т.е. как показано на рисунке. Из рисунка видно, что при перемещении касательной вдоль графика функции $f(x)$ на интервале (a, b) угол α увеличивается т.е. $f'(x)$ возрастающая функция. Следовательно, $f''(x) \geq 0$ на интервале (a, b).



Достаточность. Пусть $f''(x) \geq 0$ на интервале (a,b). Тогда функция $f'(x)$ возрастающая, т.е. угловой коэффициент касательной увеличивается; а это значит, что график функции лежит над касат-

тельной, т.е. кривая вогнута на (а, в). Аналогично доказывается теорема относительно выпуклости на интервале (а, в).

п.8. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Если "x_0" - абсцисса точки перегиба, то $f''(x_0)=0$ или не существует. Для того, чтобы выяснить, когда же точка "x_0" будет действительно являться абсциссой точки перегиба, нужно воспользоваться достаточными признаками.

Первый достаточный признак точки перегиба.

Точка (x_0, y_0) есть точка перегиба линии $y = f(x)$, если $f''(x)=0$ или не существует и $f''(x_0)$ меняет знак при переходе "x" через "x_0".

Второй достаточный признак точки перегиба.

Точка (x_0, y_0) есть точка перегиба линии $f(x)$, если $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$; при $f'''(x_0)>0$ слева от нее лежит участок выпуклости, справа - участок вогнутости, а при $f'''(x_0)<0$ - слева участок вогнутости, а справа - участок выпуклости.

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = \frac{x^3}{6} - x^2$

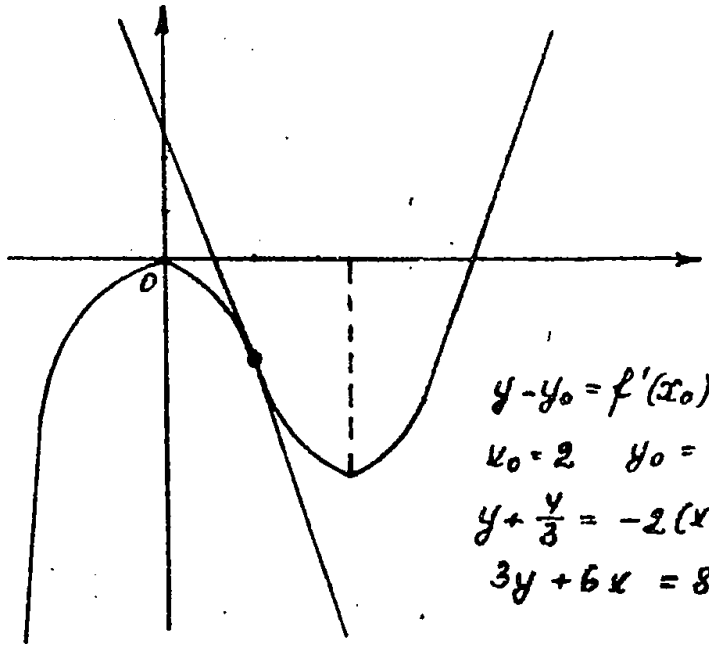
Решение. $f'(x) = \frac{x^2}{2} - 2x; \quad f''(x) = x-2;$

$f''(x)<0, \; x-2<0 \to x\in(-\infty, 2)$

$f''(x)>0 \to x-2>0 \to x(2, \infty)$

"x = 2" – точка перегиба.

Составим уравнение касательной в точке перегиба.



$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 2 \quad y_0 = -\frac{4}{3};$$

$$y + \frac{4}{3} = -2(x - 2)$$

$$3y + 6x = 8$$

§ 10. КРИВИЗНА ЛИНИИ.

п.1. Понятие кривизны.

Ранее было установлено, как найти интервалы выпуклости и вогнутой кривой. В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о том, как установить степень вогнутости (выпуклости) кривой. На рисунке 1 проведены две линии, которые выпуклые на интервале (a, b), но выпуклые по разному, т.е. степень выпуклости различная.

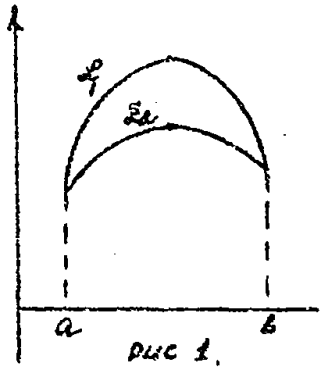


рис 1.

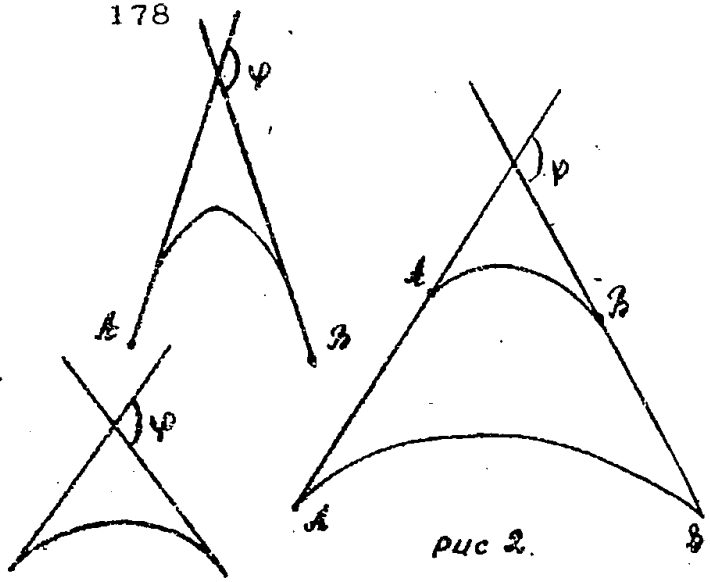
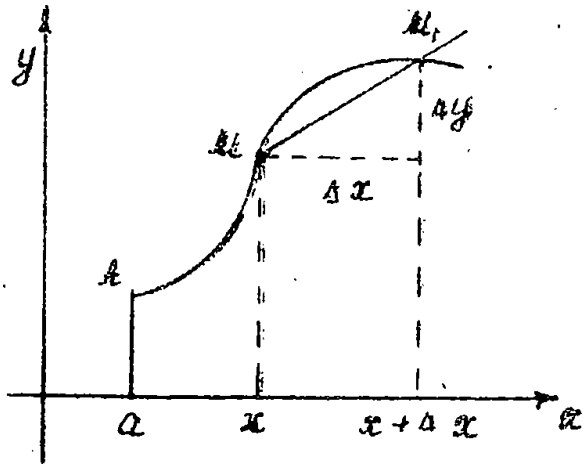


рис 2.

Для того, чтобы характеризовать степень выпуклости (вогнутости) кривой, введем понятие кривизны кривой.

Определение. Угол, образованный касательными в конечных точках дуги AB, называется углом смежности φ. Угол смежности характеризует степень выпуклости кривой, хотя и недостаточно. Эта недостаточность заключается в следующем: из рисунка 2 видно, что дуги с различной степенью выпуклости имеют один и тот же угол смежности φ. Очевидно, в характеристике степени кривизны нужно учитывать длину AB кривой. Таким образом, степень выпуклости (вогнутости) характеризует отношение угла смежности к длине дуги AB. Поэтому понятие кривизны дадим следующее.



Определение. Кривизной линии в точке А называется предел отношения угла смежности φ к длине дуги АВ, когда точка В стремится к точке А, т.е. $K_A = \lim\limits_{B \to A} \frac{\varphi}{\smile AB}$

п. 2. Формула для вычисления кривизны.

Получим формулу для вычисления кривизны в данной точке, вид которой зависит от вида уравнения, которым задана линия. Для этого введем понятие дифференциала дуги. Возьмем линию АВ, заданную уравнением $y = f(x)$ и примем точку "А" за начало отсчета. Тогда длина дуги "АМ" будет являться функцией абсциссы "х" точки М, т.к. $\smile AM = \ell(x)$

Тогда будет равен $\ell'(x)$ Дифференциалом дуги $\smile MM_1$ = $d\ell = \ell'(x)dx$ Вычислим $\ell'(x)$

$$\ell'(x) = \frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\smile MM_1}{\Delta x}$$

Будем при этом опираться на следующий геометрический факт (примем его без доказательства) предел отношения длины

дуги к длине стягивающей ее хорды при стремлении длины дуги к нулю равен 1, т.е.

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\cup MM_1}{\overline{MM_1}} = 1$$

Применительно к окружности это свойство выражается первым специальным пределом.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

Тогда на основании свойства эквивалентных бесконечно малых величин имеем $\cup MM_1 \sim \overline{MM_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Следовательно, $\frac{dl}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}$

Откуда $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$ – дифференциал дуги. Рассмотрим другие наиболее часто встречающиеся ~~формулы~~ дифференциала дуги.

1. $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, если линия задана плоская. Для пространственной линии дифференциал дуги имеет вид $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

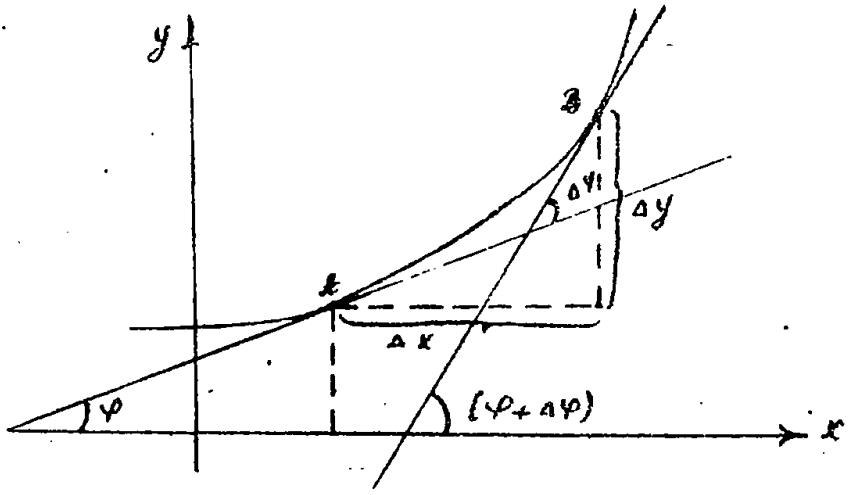
2. Дифференциал дуги, заданной параметрической форме $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$ будет иметь вид $dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\, dt$

3. Дифференциал дуги в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & x'_\varphi = r'\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi \quad dx = x'\varphi \cdot d\varphi \\ y = r\sin\varphi, & y'_\varphi = r'\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi \quad dy = y'_\varphi \cdot d\varphi \end{cases}$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r'^2_\varphi + r^2}\, d\varphi$$

Пусть линия $\mathcal{L}$ задана уравнением $y = f(x)$. Построим данную линию и на ней возьмем две точки : A(x, y) и B $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$



Вычислим кривизну данной линии в точке A

$$K_A = \lim_{B \to A} \frac{\Delta\varphi}{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\varphi' x}{\sqrt{1 + y'^2_x}}; \quad tg\varphi = y'_x \quad \varphi = arctg\, y'_x \quad \varphi'_x = \frac{y''_x}{1 + y'^2_x}$$

Дифференцируем по x, получим:

$$K_A = \frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{3/2}}$$ – формула для вычисления кривизны линии в данной точке.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

то $$K_t = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}$$

Примеры. 1. Определить кривизну окружности в любой ее точке.

Решение. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $x'_t = -a\sin t$ $x''_t = -a\cos t$

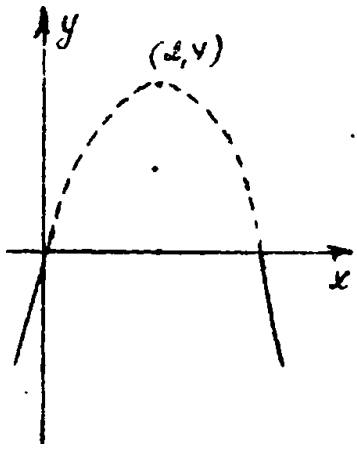
$y'_t = a\cos t$ $y''_t = -a\sin t$

$K = \frac{1}{a}$, т.е. окружность есть линия постоянной кривизны.

2. Определить кривизну параболы в ее вершине

$$y = 4x - x^2$$

Решение.



$$K_{(2,4)} = \frac{y''_{(2,4)}}{(1 + y'^2_x)^{3/2}_{(2,4)}}$$

$y'_x = 4 - 2x$

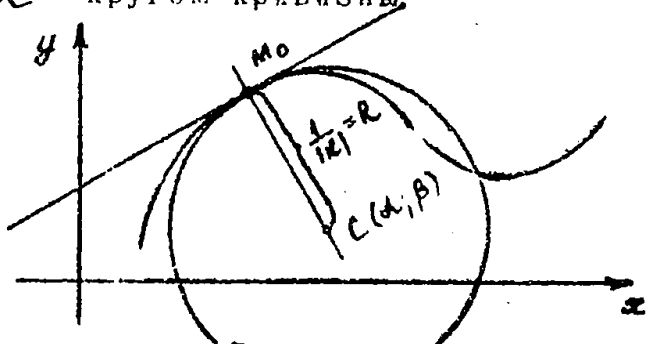
$y'_{(2,4)} = 0$ $y'' = -2$

$$K_{(2,4)} = \frac{-2}{(1+0)^{3/2}} = -2$$

Очевидно, что линия с уравнением "y= kx + b" будет линия нулевой кривизны.

п.3. РАДИУС, КРУГ, ЦЕНТР КРИВИЗНЫ. ЭВОЛЮТА И ЭВОЛЬВЕНТА.

Возьмем некоторую линию $\mathcal{L}$ и точку $M_0 \in \mathcal{L}$: В точке "M_0" проведем касательную и нормаль к линии $\mathcal{L}$ в сторону вогнутости кривой $\mathcal{L}$. От точки "M_0" отложим отрезок "M_0C", равный $R = \frac{1}{|k|}$. Тогда $M_0C = R = \frac{1}{|k|}$ называется радиусом кривизны; точка C – центром кривизны, окружность с центром в точке C (α, β) и радиусом R – кругом кривизны.



Определение. Геометрическое место центров кривизны (точек C) линии $\mathcal{L}$ называется эволютой и обозначается $\mathcal{L}'$! Сама же линия $\mathcal{L}$ по отношению к эволюте $\mathcal{L}'$ называется эвольвентой.

Получим уравнение эволюты.

Для этого на линии $\mathcal{L}$ возьмем текущую точку $M_0(x,y)$ и проведем нормаль к линии $\mathcal{L}$ в этой точке. Обозначив через X,Y координаты текущей точки нормали, получим уравнение нормали $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$

Так как нормаль проходит через точку "С", то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению нормали, т.е. (1) $\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x)$

получим первое уравнение, связывающее координаты центра кривизны. Учитывая, что круг кривизны проходит через точку $M_0(x,y) \in \alpha$,

получим второе уравнение, связывающее координаты центра кривизны α, β.

$$(2)\quad (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2$$

Итак, мы получили систему уравнений, связывающих координаты центра кривизны:

$$\begin{cases} \beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \\ (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2 \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно α и β, получим параметрические уравнения эволюты.

Из первого уравнения найдем β: $\beta = y - \frac{1}{y'}(\alpha - x)$ и подставим во второе уравнение. Тогда получим

$$(\alpha - x)^2 = \frac{y'^2 R^2}{1 + y'^2} \qquad \text{или} \qquad \alpha = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}$$

Тогда β будет равно $\beta = y \pm \frac{1 + y'^2}{|y''|}$

Рассмотрев два случая $y'' > 0$ и $y'' < 0$ можно доказать, что параметрические уравнения эволюты имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$$

Пример. Дана линия $\mathcal{L}: y = 1 - \frac{x^2}{2}$

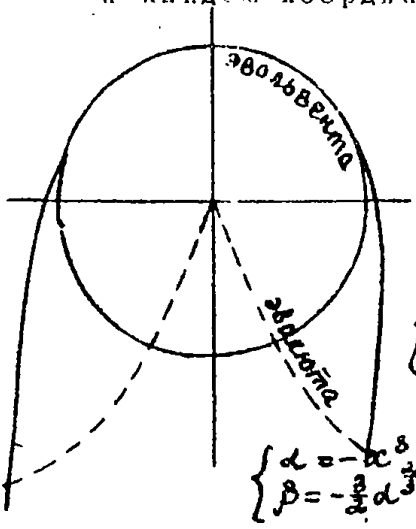
Требуется найти: 1) радиус кривизны, круг кривизны в вершине кривой,

2). составить уравнение эволюты и построить кривую и эволюту.

Решение . Построим линию по данному уравнению и найдем координаты вершины. Радиус кривизны

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} \qquad y' = -x \qquad y'' = -1$$

$$y'(0,1) = 0 \quad R_{(0,1)} = 1.$$



Строим круг кривизны с радиусом, равным 1. Найдем параметрические уравнения эволюты.

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{(1+y'^2)}{y''} \end{cases}$$

$$\alpha = x - x(1+x^2) = -x^3$$

$$\beta = y - 1 - x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x^2 = -\frac{3}{2}x^2$$

$$\begin{cases} \alpha = -x^3 \\ \beta = -\frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$ - параметрические уравнения искомой эволюты.

Исключая параметр "x", получим одно уравнение относительно α и β $\qquad \beta = -\frac{3}{2}\alpha^{\frac{2}{3}}$

-уравнение полукубической параболы.

п.4. ОБЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ.

Ранее были изучены отдельные элементы поведения функций. Теперь объединим изученные элементы в общий план исследования функций. Обычно при исследовании функций и построении графиков рассматривают следующие этапы исследования поведения функций:

1. Отыскивается некоторая область определения функции E, если есть точки разрыва, то устанавливается их характер, в точках бесконечного разрыва существуют вертикальные асимптоты;

2. Исследуется данная функция на четность, нечетность, периодичность, в зависимости от результатов исследования делается вывод относительно особенностей графика;

3. отыскиваются точки пересечения графика с осями координат, горизонтальные и наклонные асимптоты;

4. С помощью производной первого порядка устанавливаются интервалы монотонности и экстремумы функции;

5. с помощью второй производной устанавливаются интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба;

6. Устанавливается степень кривизны в наиболее характерных точках.

Пример. Исследовать функцию и построить ее график $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

1). Область определения $E = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

точки $X = \pm 1$ точки разрыва, исследуем их характер:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

$x = \pm 1$ – уравнения вертикальных асимптот.

2. $f(-x) = -\frac{x^3}{1-x^2}$, т.е. данная функция нечетная, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

3. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \pm\infty$, т.е. горизонтальных асимптот нет, найдем наклонные асимтоты

$$K = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 \qquad B = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = 0$$

$y = -x$ – уравнение наклонной асимптоты.

Точки пересечения с осями координат:

с осью OX: $y = 0$ $x = 0$,

с осью OУ : $x = 0$ $y = 0$, т.е. кривая проходит через начало координат.

4. $y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$

Ищем те значения "x", при которых первая производная равна нулю или не существует.

$y'_x = 0 \quad \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0 \quad x^2-1 \neq 0$, т.е.

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

$x^2(3-x^2) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

– критические точки.

Исследуем характер критических точек.

$y'(0-\delta) > 0, \; y'(0+\delta) > 0$ т.е. в точке "x = 0" экстемума нет.

$y'(\sqrt{3}-\delta) > 0, \; y'(\sqrt{3}+\delta) < 0$ $x=\sqrt{3}$ – точка максимума

$x = -\sqrt{3}$ – точка минимума, $y_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$, $y_{min} \approx -2{,}6$

Множество точек, на котором функция возрастает, будет $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

На множестве $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ – функция убывает

5). $y'' = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$;

$1-x^2 \neq 0$

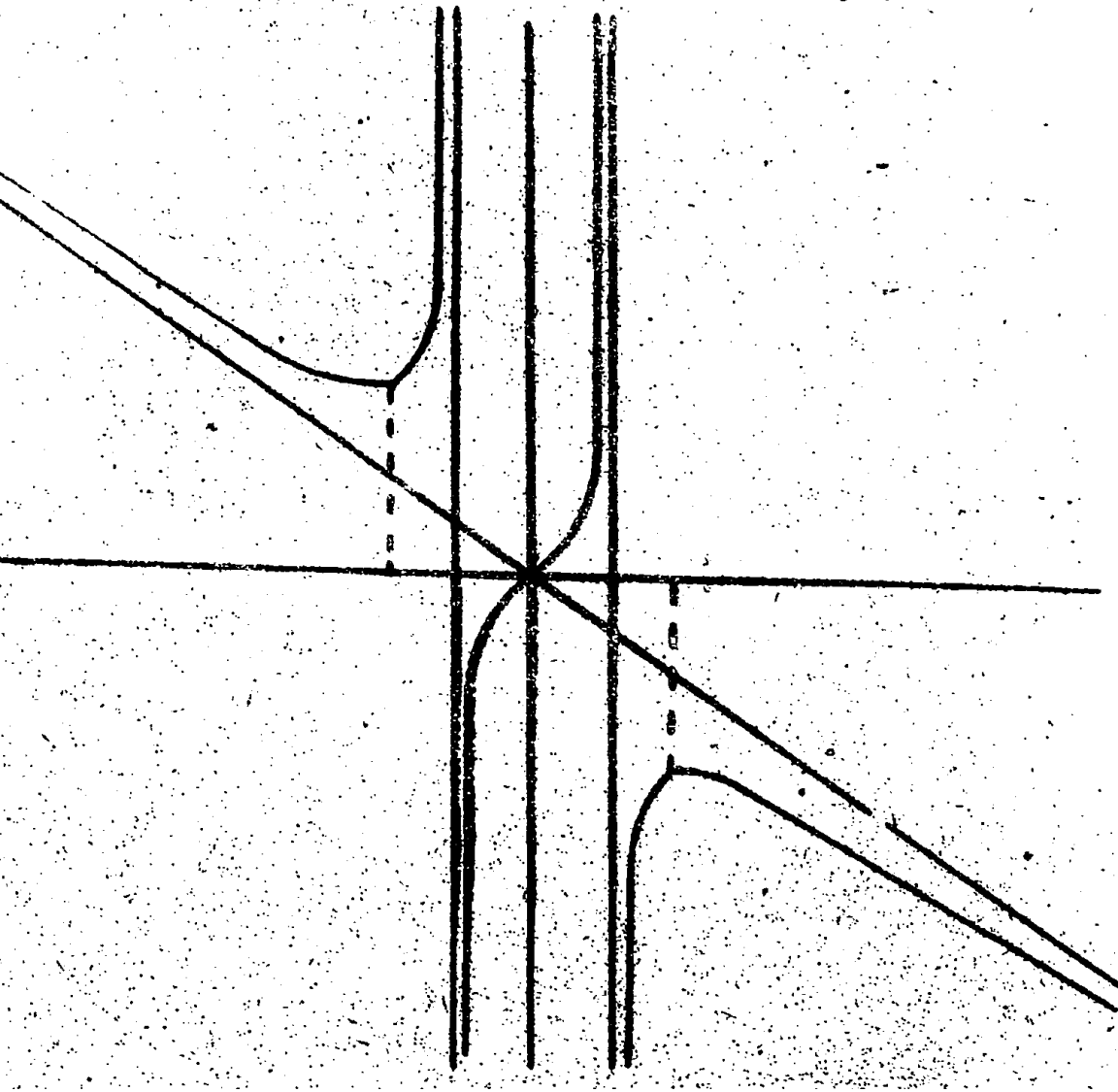
$x(3+x^2) \neq 0$

$3+x^2 \neq 0$

$x = 0$ – критическая точка. $y''(0-\varepsilon) < 0$, $y''(0+\varepsilon) > 0$.

Следовательно, $x = 0$ есть точка перегиба.

По результатам исследования строим график.



§ 11. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Понятие производной широко используется при решении физических и механических задач.

Рассмотрим некоторые простейшие из них.

Задача 1. Скорость прямолинейного движения.

Пусть тело совершает прямолинейное движение и известно расстояние S, проходимое за каждое данное время t, т.е. задан закон зависимости расстояния от времени; $S = S(t)$

Уравнение $S = S(t)$ называют в механике уравнением движения, а график, соответствующий этому движению – графиком движения. Найдем скорость движения тела в момент $t = t_0$.

Для этого рассмотрим движение тела в течение интервала времени Δt от некоторого момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$. За время t_0 тело прошло путь $S(t_0)$, а за время $t_0 + \Delta t$ – путь $S + \Delta S = S(t_0 + \Delta t)$. Значит, за Δt единиц времени тело прошло путь $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t)$

Тогда скорость движения в интервале времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ будет равна $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Но среднюю скорость нельзя рассматривать как удовлетворительную характеристику движения: она зависит от интервала для которого производится

расчет. Исходя из того, что среднюю скорость в интервале $(t_0, t_0+\Delta t)$ следует считать тем лучше характеризующей движение, чем меньше Δt, заставим Δt стремиться к нулю. Если при этом существует предел средней скорости, то его и принимают в качестве скорости движения в данный момент t_0, т.е.

$$v(t_0) = S'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Итак, скорость движения тела в данный момент t_0 есть производная от пути S по времени t, вычисленная в момент t_0.

Задача 2. Плотность.

Пусть дана материальная линия. Если двигаться от какого из его концов к другому, измеряя длину S пройденного куска, то каждому значению S соответствует определенная масса m и поэтому последняя является функцией S: $m = \varphi(S)$

Говорят, что масса распределена равномерно по всей линии и что эта материальная линия однородна, если два любых равных по длине участка содержат равные же массы.

В этом случае m есть линейная функция S, т.е. m зависит прямо-пропорционально от S: $m = k \cdot S$, где k - постоянный коэффициент пропорциональности, причем, $\Delta m = k \cdot \Delta S$ и

и отношение $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ показывает, сколько единиц массы приходится на единицу длины S. Это постоянное отношение называется плотностью однородной линии.

Пусть теперь масса распределена неравномерно вдоль линии. Рассмотрим участок линии S_0, $S_0 + \Delta S$. Масса этого участка выражается так: $\Delta m = \varphi(S + \Delta S) - \varphi(S)$. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ уже не будет постоянным, а будет зависеть как от Δm, и от ΔS и называется средней линейной плотностью линии. Очевидно, что средняя плотность характеризует распределение материи на данном участке "в общем" и "в среднем". Чтобы избежать такой неопределенности, вводят плотность в данной точке линии (при данном S_0). Это понятие устанавливают, исходя из того соображения, что средние плотности, соответствующие уменьшающимся участкам длины ΔS все лучше характеризуют распределение материи. Таким образом, линейной плотностью δ материальной линии в данной ее точке S_0 называется предел средней линейной плотности при стремлении ΔS к нулю, т.е.

$$\delta = \varphi'_{(S_0)} = \left(\frac{dm}{dS}\right)_{S=S_0} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi(S_0 + \Delta S) - \varphi(S_0)}{\Delta S}.$$

$$C(\tau_0)=\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{q(\tau_0+\Delta\tau)-q(\tau_0)}{\Delta\tau}$$

Следовательно, теплоемкость есть производная от количества тепла по температуре.

Рассмотренное нами на трех понятий: скорость движения, плотность, теплоемкость, несмотря на существенное различие их физического смысла, является с математической точки зрения одной и той же характеристикой соответствующей функции. Все они представляют собой частные виды так называемой скорости изменения функции, определяемой с помощью понятия производной.

Итак, первая производная от функции $f(x)$ есть скорость изменения функции.

Таким образом, линейная плотность распределения вещества вдоль некоторой линии есть производная от m массы по длине.

Аналогично тому, как были введены понятия скорости движения и плотности можно ввести понятие теплоемкости, скорости химической реакции, и т.д.

Теплоемкость тела "с" при данной температуре T_0 называется предел отношения приращения количества тепла ΔQ к приращению температуры ΔT, т.е.

Рассуждая аналогично, можно сказать, что значение второй производной от функции $f'(x)$ в точке x_0 $f''(x_0)$ есть скорость изменения функции $f'(x)$ в этой точке. Заимствуя термин из механики, можно назвать $f''(x_0)$ ускорением изменения функции $f(x)$ при данном "x_0".

Важное применение в механике при определении скорости и ускорения криволинейного движения имеют производные первого и второго порядка от векторной функции скалярного аргумента.

Подписано к печати 12 /XII-72 г. АГ № 00159.
П.л. 10, тираж 150 экз. цена 35 коп.

Редакционно-издательский отдел АПИ. Ротапринт
Заказ 411.